

To są moje notatki z wykładu przepisane jako lista zadań. Nie ponumerowanych.

Jeśli G działa na X , chcemy znać przestrzeń orbit.

Mając algebrę $\mathfrak{g}$ i grupę Liego G , mamy działanie Ad_G na $\mathfrak{g}$ (oraz działanie ad_g). Chcemy zrozumieć przestrzeń orbit, dzisiaj dla Sp i SO (dla SL wiemy co się dzieje). I na początek zakładamy że ciało nad którym zdefiniowane jest $\mathfrak{g}$, G jest algebraicznie domknięte.

Warto zauważyć, że ten problem to problem izomorfizmu w kategoriach (V, E, g) dla $SO(V)$ i (V, E, ω) dla $Sp(V)$, (przy czym zakładamy że E jest zgodne z formą tzn. $B(Ex, y) + B(x, Ey) = 0$) Na takich trójkach działają przekształcenia liniowe. Ponieważ działają one tranzytywnie na g, ω problem izomorfizmu staje się problemem klasyfikacji E pod działaniem stabilizatora B . A stabilizator B to Sp lub SO . Podobnie, mimo że przekształcenia liniowe nie działają tranzytywnie na E , ich klasyfikację rozumiemy. Wybierając reprezentanta z orbity E problem redukuje się do klasyfikacji form B pod działaniem stabilizatora E . (Zadanie uzasadnić powyższe. Jaki jest stabilizator E w SL)

Wiemy że $V = \bigoplus V_\lambda$, gdzie $V_\lambda = \ker(E - \lambda Id)^N$

Ten rozkład dobrze pasuje do formy: uzasadnij że

$$V = V_1 + V_{-1} + \bigoplus_\lambda (V_\lambda \oplus V_{\lambda^{-1}}).$$

– sumy są B-ortogonalne.

– Składowiki sumy są B-nieosobliwe.

– Składowiki sumy $\oplus$ czyli V_λ , $\lambda \neq \pm 1$ są izotropowe,

– Działanie na $V_\lambda \oplus V_{\lambda^{-1}}$ jest postacią $f \oplus f^{*-1}$. klasyfikacja na tych składnikach to klasyfikacja nilpotentów w $sl(V_\lambda)$.

(Uwaga: częścią tego zadania jest argument że **uogólnione** przestrzenie własne odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne. Na wykładzie tego nie udowodniłem)

Wielomian stopnia n jest palindromiczny jeśli $P(x) = x^n P(\frac{1}{x})$. Znaczący to że można go czytać wspak: $a_i = a_j$ jeśli $i + j = n$.

Znaczący to że jeśli $\lambda \neq 1$ jest pierwiastkiem P , jej odwrotność też jest pierwiastkiem. Suma palindromów tego samego stopnia jest palindromem, iloczyn dwóch palindromów jest palindromem.

Wielomian charakterystyczny symplektycznego endomorfizmu jest postaci $(x - 1)^a (x + 1)^b P(x)$, gdzie a, b są parzyste, a $P(x)$ jest palindromicznym wielomianem (więc ostatecznie jest palindromiczny)

Wielomian charakterystyczny ortogonalnego endomorfizmu jest postaci $(x - 1)^a (x + 1)^b P(x)$, gdzie a, b są dowolne, a $P(x)$ jest palindromicznym wielomianem (więc ostatecznie jest palindromiczny lub postaci $(x - 1) \cdot \text{Palindrom}(x)$)

Pokaż że

a. każdy wielomian stopnia n jest wielomianem charakterystycznym endomorfizmu przestrzeni wymiaru n .

b. Każdy wielomian palindromiczny jest wielomianem charakterystycznym zarówno endomorfizmu symplektycznego, jak ortogonalnego. Każdy wielomian postaci $(x - 1) \cdot \text{Palindrom}(x)$ jest wielomianem charakterystycznym endomorfizmu ortogonalnego.

Nad jakim ciałem przeprowadzacie ten argument?

Nilpotenty w $\mathfrak{g}$, i ogólniej ad .

Definicja $n \in \mathfrak{g}$ nazywamy nilpotentnym jeśli $ad(n) \in \text{End}(\mathfrak{g})$ jest nilpotentnym endomorfizmem przestrzeni wektorowej.

Zadanie. W przypadku SO, Sp (ogólniej algebr macierzowych $\mathfrak{g} < \text{End} V$) mamy trzy konkurencyjne definicje nilpotenta: a. powyższa, b. n jest nilpotentny jeśli jest nilpotentnym endomorfizmem V (tzn $n^K = 0$) c. jest nilpotentny jako element $\text{End}(V)$, tzn $ad(n)$ jest nilpotentnym endomorfizmem. Pokazać że te definicje są zgodne.

Ogólniej $ad_{\mathfrak{g}}$ daje możliwość zbadania rozkładu endomorfizmu $ad(h)$. Na przykład " h nazywamy półprostym elementem $\mathfrak{g}$ jeśli $ad(h)$ jest diagonalizowalny" (tzn w rozkładzie na uogólnione przestrzenie własne wystarczy używać prawdziwych przestrzeni własnych). To jest początek czegoś dużego.

Zrozumieć nilpotent w SO, Sp możemy spróbować tak: potraktować go jako nilpotent w SL , znaleźć jego diagram Younga, I zapytać czy/ile mamy form symetrycznych/skosnych które ten nilpotent zachowuje. Potem wziąć taką formę, ustandaryzować ją, i dostać postać normalną nilpotenta.

To jest w zasadzie bezpośredni rachunek. Ale warto użyć czegoś mniej oczywistego: twierdzenia Jacobsona-Morozowa-Kostanta. Z tego twierdzenia wynika pewna "sztywność", nieoczywista w wyjściowym sformułowaniu problemu.

Twierdzenie (JMK) Niech $\mathfrak{g}$ prosta algebra Liego. Niech $e \in Nil(\mathfrak{g})$. Wtedy istnieje f , taki że e, f, h tworzą $\mathfrak{sl}(2)$ -trojkę. **(JM)** Co więcej różne f są ze sobą sprzężone przez element centralizatora e . **(K)**

Zadanie: znaleźć f, h jeśli e jest dane przez pojedynczą klatkę Jordana nilpotenta w SL

SL2.

Jest zadana przez generatory i relacje

$$[e, h] = 2e, [f, h] = -2f, [e, f] = h.$$

W macierzowej notacji e górna trójkątna, f dolna trójkątna, h diagonalna.

Reprezentacja $\mathfrak{sl}(2)/\mathfrak{g}$ na V : homomorfizm algebr Liego $\mathfrak{g} \rightarrow \text{end}(V)$. Podobnie dla grup $G \rightarrow GL(V)$ i algebr $A \rightarrow \text{End}(V)$.

Ten homomorfizm powinien być regularny: ciągle gładki, wymierny, wielomianowy... W istocie minimalne założenia regularności pociągają bardzo silną regularność (każda funkcja $f: R \rightarrow R$ która spełnia $f(x+y) = f(x) + f(y)$ i jest mierzalna, jest liniowa $f(x) = Ax$)

Zadanie. Jeśli n jest nilpotentem w $\mathfrak{g}$, a $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{end}(V)$ jest reprezentacją, to $\rho(n)$ jest nilpotentem.

Wtedy każda reprezentacja $\mathfrak{sl}(2)$ daje nilpotent $\rho(e)$, JKM daje implikację odwrotną.

Reprezentacje $\mathfrak{sl}(2)$ (Fulton Harris).

1. Definicja: Reprezentacja na V jest nieredukowalna jeśli V nie zawiera niezmienniczej podprzestrzeni.
2. Wazny fakt: Każda reprezentacja $\mathfrak{sl}(2)$ (prostej $\mathfrak{g}$) rozkłada się w sumę reprezentacji nieredukowalnych.

3. Wazne wyliczenie: Nieredukowalne reprezentacje $\mathfrak{sl}(2)$ to reprezentacje na potęgach symetrycznych $S^d(V^2)$, zwanych też formami binarnymi.

Wtedy: $d = 0$ to reprezentacja trywialna (grupa idzie w jedynekę, algebra w zero)

$d = 1$ reprezentacja definiująca, $d = 2$ dołączona, $d = 3 \dots$

W książce Fultona i Harrisa warto obejrzeć obrazek z e i f przesuwającymi, h stabilizującymi podprzestrzenie własne.

Zadanie: pokazać bezpośrednio że reprezentacja dualna do $S^d(V^2)$ jest z nią izomorficzna.

Wniosek: Reprezentacje $\mathfrak{sl}(2)$ są opisane przez diagramy Younga. (słupki wysokości 1 to reprezentacje trywialne.)

Symplektyczne i ortogonalne reprezentacje $\mathfrak{sl}(2)$: Zamiast homomorfizmów w $GL/SL/\mathfrak{sl}$ używamy homomorfizmów w SO, Sp . Uzasadnij że

1. $S^d(V^2) \oplus S^d(V^2)$ jest reprezentacją zarówno symplektyczną jak ortogonalną.

2. $S^{2k+1}(V^2)$ dopuszcza jedyną z dokładnością do skalowania niezmienniczą na $SL(2)$ formę skosną (która jest nieosobliwa). Nie dopuszcza żadnej symetrycznej formy niezmienniczej.

3. $S^{2k}(V^2)$ dopuszcza jedyną z dokładnością do skalowania niezmienniczą na $SL(2)$ formę symetryczną (która jest nieosobliwa). Nie dopuszcza żadnej skosnej formy niezmienniczej.

Wynioskuj następujące Twierdzenie:

Reprezentacja $\mathfrak{sl}(2)$ jest symplektyczna iff jej diagram Younga zawiera parzystą ilość słupków każdej nieparzystej wysokości.

Reprezentacja $\mathfrak{sl}(2)$ jest ortogonalna iff jej diagram Younga zawiera parzystą ilość słupków każdej parzystej wysokości.

Posrednie wazne Twierdzenie: Jeśli ρ jest symplektyczną/ortogonalną reprezentacją $\mathfrak{sl}(2)$, to podprzestrzenie ustalonego typu d (tzn rozkładamy reprezentację w reprezentacje nieredukowalne, a potem sumujemy wszystkie składniki izomorficzne z $S^d(V^2)$) są wzajemnie ortogonalne. (Wskazówka: dowiedzieć się co to Lemat Schura i zastosować go: Weź sumę przestrzeni typu d i c , ogranicz formę B do nich, jeśli przestrzenie

nie są prostopadłe, to dostajemy niezerowe odwzorowanie ekwiwariantne z przestrzeni typu d w przestrzeń dualną do przestrzeni typu c , sprzeczność)

Wniosek: Maksymalna podprzestrzeń typu d jest nieosobliwa

Wnioski dla nilpotentów: dwa nilpotenty w Sp/SO są sprzężone iff mają te same diagramy Younga. Diagramy nilpotentów w Sp/SO są ograniczone tak jak diagramy reprezentacji sl_2 .