

Algebry zgradowane, jednorodny ideal etc.

1. Algebra zgradowana $A_I = \bigoplus A_i$ przez polgrupe I to algebra rozlozona w sume prosta swoich podprzestrzeni wektorowych, ktore sa indeksowane przez I tak, ze $A_i \cdot A_j \subset A_{i+j}$. Znalazc interesujace przyklady. Co to jest algebra gradowana przez polgrupe $(N, \max(x, y))$, $(\mathbb{Z}_2, +)$.

2. Majac homomorfizm polgrup $\phi: I \rightarrow J$, mozemy zdefiniowac ϕ -homomorfizmy algebr A_I, B_J , zgradowanych przez I, J jako zwykly homomorfizm algebr, spelniajacy dodatkowo warunek $f(A_i) \subset B_{\phi(i)}$. Jadro takiego homomorfizmu to ideal M spelniajacy warunek: dla kazdego $j \in J$, $a = \sum_{i \in I} a_i \in M$ pociaga ze $\sum_{i \in \phi^{-1}(j)} a_i \in M$.

Majac dane A, ϕ oraz ideal spelniajacy ten warunek skonstruowac " J -zgradowany iloraz B " (to zwyczajny iloraz, tyle ze jest na nim gradacja).

Majac dany zbior S elementow I -zgradowanej algebry A , mozemy skonstruowac: a. nowa polgrupe J , wraz z homomorfizmem $\phi: I \rightarrow J$; b. J -gradacje na algebrze ilorazowej $A / \langle S \rangle$, gdzie $\langle S \rangle$ to najmniejszy ideal zawierajacy S . Odwzorowanie ilorazowania staje sie homomorfizmem algebr zgradowanych. Tyle ze czesto J jest jednoelementowa polgrupa.

3. Algebra Clifforda formy kwadratowej $Q(x, x)$ na przestrzeni V to iloraz algebry tensorowej $T(V)$ przez ideal generowany elementami $v \otimes v - Q(v, v)$. Pokazac ze algebra Clifforda ma naturalna $\mathbb{Z}_2$ gradacje. Jesli Q jest forma zerowa, to algebra Clifforda jest znanym nam objektem. Jaki jest wymiar algebry Clifforda.

Przepisac definicje algebry Clifforda w terminach polaryzacji Q , tzn symetrycznej formy dwuliniowej.

4. Algebra Weyla formy skosnej $\omega(v, w)$ to iloraz algebry tensorowej przez ideal rozpiety elementami $v \otimes w - w \otimes v - \omega(v, w)$. Jesli $\omega = 0$ to algebra Weyla jest znanym nam objektem. Pokazac ze algebra Weyla jest nieskonczenie wymiarowa. Pokazac ze jesli ω jest niezdegenerowana to algebra Weyla jest izomorficzna z algebra wielomianowych operatorow roznicek na przestrzeni wektorowej wymiaru $(\dim V)/2$ (wsk. zaczac od V wymiaru 2).

Jak opisac algebre Weyla jesli ω ma jadro.

5. Zgradowana algebra jest *przemienna* jesli $ab = ba$ dla dowolnej pary jednorodnych elementow. Jest *zgradowanie przemienne* (*graded commutative*) jesli $ab = (-1)^{\deg(a) \cdot \deg(b)} ba$ (ta definicja wymaga dodatkowej struktury na zbiorze indeksow)

Pokazac ze dla kazdej algebry zgradowanej istnieje jedyny z dokladnoscia do izomorfizmu obiekt uniwersalny dla morfizmow w zgradowane algebry przemienne (zgradowanie przemienne). Jak opisac go konkretnie? Czy abelianizacja moze byc tym samym co zgradowana abelianizacja.

6. (od grafow do algebr). Niech G bedzie grafem. Rozwazmy algebre laczną i przemienną (odpowiednio gradowanie przemienne) generowaną przez zbior wierzchołków (w gradacji 1) i mającą relacje $ab = 0$ jeśli wierzchołki nie są połączone krawędzią. (To się nazywa przemienne lub skosnie przemienne algebra Stanley'a grafu). Zbadac ta algebre: jej wymiar, wymiary zgradowanych czesci, funktorialnosc ze wzgledy na pewne (jakie) odwzorowania grafow. * Opisac ja jako obiekt uniwersalny.