

Formy różniczkowe, lista 6

O ile z kontekstu nie wynika inaczej, należy domniemywać, że E jest wiązką nad rozmaitością M wyposażoną w koneksję ∇ .

1. Na wiązce normalnej N do podrozmaitości $M^m \subset \mathbf{R}^n$ jest naturalna koneksja: dla $v \in T_p M$ i cięcia s nad otoczeniem p określamy $\nabla_v s$ jako rzut prostopadły na N_p wektora $D_v(s)$ (w tym ostatnim wyrażeniu s traktujemy jako funkcję o wartościach w $\mathbf{R}^n$, a D_v oznacza pochodną kierunkową). Podaj przykład uzasadniający, że rzut prostopadły jest w powyższej definicji niezbędny. Wylicz formę opisaną koneksji dla powierzchni zadanej parametrycznie: $\Sigma(x, y) = (x, y, x^2 - y^2)$ i reperu składającego się z jednego cięcia $s = \Sigma_x \times \Sigma_y$. Zrób to także dla reperu znormalizowanego $\sigma = s/|s|$.
2. Niech E będzie podwiązką wiązki trywialnej $M \times \mathbf{R}^n$. Określamy koneksję na E następująco: $(\nabla_v s)(p)$ to rzut prostopadły na E_p wektora $(D_v s)(p) \in \mathbf{R}^n$ (na $\mathbf{R}^n$ używamy standardowego iloczynu skalarnego). Sprawdź, że jest to koneksja na E zgodna z metryką riemannowską obciętą z $\mathbf{R}^n$.
3. Mając dane koneksje na wiązkach E i F zdefiniuj indukowane koneksje na $E \oplus F$, $E \otimes F$, $\text{Hom}(E, F)$, E^* , $\Lambda^2 E$, $E \otimes E \otimes F$, $\text{Sym}^2(E)$ itp. Wyraż formy tych koneksji przez formy wyjściowych koneksji na E i F .
4. Niech E będzie jednowymiarową wiązką zespoloną. Jak się ma krzywizna $E^{\otimes n}$ do krzywizny E ?
5. Niech F będzie zamkniętą 2-formą na M o wartościach rzeczywistych / zespolonych. Uzasadnij, że lokalnie F daje się zrealizować jako forma krzywizny pewnej koneksji na wiązce o jednowymiarowym włóknie rzeczywistym / zespolonym. Uzasadnij, że jeśli F ma wartości urojone, to wiązkę zespoloną o której mowa w poprzednim zdaniu można wyposażyć w metrykę hermitowską zgodną z koneksją.
6. Cięcie s nazywamy *równoległym*, jeśli $\nabla s = 0$. Uzasadnij, że dowolna wiązka nad odcinkiem ma niezerowe cięcia równoległe.
7. Niech ∇, ∇' będą dwoma koneksjami na wiązce E nad $(0, 1)$. Udowodnij, że istnieje $h \in \Gamma(\text{Aut}(E))$, takie że dla każdego cięcia s wiązki E zachodzi $h^{-1}\nabla(hs) = \nabla's$.
8. Poprzednie zadanie mówi, że na wiązce nad odcinkiem jest – z dokładnością do pewnej równoważności – jedyna koneksja. Zbadaj, ile jest – z dokładnością do tej samej równoważności – koneksji na trywialnej wiązce nad okręgiem.
9. Uzasadnij, że jeśli wiązka ma nad pewnym zbiorem reper złożony z cięć równoległych, to jej krzywizna jest na tym zbiorze zerowa. Czy jest też odwrotnie?
10. Używając wzoru $F = dA + A \wedge A$ wylicz jak zmienia się forma krzywizny pod wpływem zmiany reperu.
11. Udowodnij, że $d^\nabla F^\nabla = 0$.
12. Udowodnij, że $F^{f^*\nabla} = f^*F^\nabla$.
13. Gładkie odwzorowanie $f: N \rightarrow M$ ma obraz zawarty w pewnej jednowymiarowej podrozmaitości rozmaitości M . Udowodnij, że krzywizna koneksji $f^*\nabla$ jest zerowa. (∇ to pewna koneksja na wiązce E nad M)