

Formy różniczkowe

czyli co to jest dx

Formy różniczkowe są narzędziem, przy pomocy którego analiza łączy geometrię i topologię.¹

Przykład. Niech $P, Q: U \rightarrow \mathbf{R}$ będą funkcjami określonymi na pewnym podzbiórze U płaszczyzny $\mathbf{R}^2$. Pytanie: Czy istnieje funkcja $f: U \rightarrow \mathbf{R}$, taka że $\frac{\partial f}{\partial x} = P$, $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$? Łatwo zauważyć, że $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ jest warunkiem koniecznym dla istnienia f . Okazuje się, że jest to również warunek dostateczny, **o ile w obszarze U nie ma dziur**. W ten sposób analityczne zadanie pozwala otrzymać informację topologiczną.

De Rham opisuje powyższe zjawisko mówiąc, że forma $Pdx + Qdy$ odpowiada pewnej dziurze w U . Niestety, wiele innych form opisuje tę samą dziurę – na szczęście potrafimy dokładnie powiedzieć, które to są (o tym mówią kohomologie de Rhama), a w sprzyjających okolicznościach (gdy mamy metrykę Riemanna) wybrać spośród nich jedną najlepszą (o tym jest teoria Hodge’a).

Jak wiadomo z życia, jeśli powierzchnia się zagina (jak sfera), to ma dodatnią charakterystykę Eulera, a jeśli się fałduje (jak siodło) – ujemną. Twierdzenie Gaussa–Bonnet–Cherna mówi, jak krzywizna rozmaitości ma się do jej charakterystyki Eulera – nie tylko w wymiarze dwa, ale też w wyższych.

Wstępny program wykładu:

1. Definicje: formy różniczkowe, pochodna zewnętrzna, całka. Twierdzenie Stokesa.
2. Kohomologie de Rhama.
3. Kohomologie snopów; izomorfizm de Rhama.
4. Wiązki i koneksje; krzywizna i klasy Cherna–Weila.
5. Twierdzenie Gaussa–Bonnet–Cherna.
6. Laplasjan na formach, teoria Hodge’a.
7. Rozkład Hodge’a na rozmaitościach Kählerowskich.

Od słuchaczy oczekuję znajomości rozmaitości różniczkowalnych i analizy funkcjonalnej.

¹ Ewidentny plagiat z K. Maurina.