

Algebra liniowa 1R, Lista 12

Wszystkie macierze których rozmiar nie jest explicite określony to macierze 3×3 .

1. Uzasadnij następujące wzory. Załóż, że występujące w nich macierze odwrotne istnieją. a) $(M^{-1})^{-1} = M$; b) $\det(MNM^{-1}) = \det(N)$; c) $(\lambda I - M)^{-1} - (\mu I - M)^{-1} = (\mu - \lambda)(\mu I - M)^{-1}(\lambda I - M)^{-1}$; d) $\det(M^{-1}) = (\det(M))^{-1}$.
2. Znajdź wektory i wartości własne dla (a) obrotu o kąt θ wokół pewnej prostej; (b) rzutu na prostą; (c) rzutu na płaszczyznę; (d) symetrii względem prostej; (e) symetrii względem płaszczyzny. (O wszystkich prostych i płaszczyznach o których mowa w tym zadaniu zakładamy, że przechodzą przez 0.)
3. Znajdź wartości i wektory własne. Porównaj krotność pierwiastka wielomianu charakterystycznego z maksymalną możliwą liczbą odpowiadających mu liniowo niezależnych wektorów własnych.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Znajdź wszystkie wymierne pierwiastki wielomianów. Stwierdź też, ile mają one pierwiastków rzeczywistych. (a) $x^3 + 5x^2 + 2x - 8$, (b) $x^3 + 5x^2 + 5x + 4$, (c) $2x^3 - 10x^2 + 7x + 3$, (d) $6x^3 + 7x^2 - x - 2$, (e) $-x^3 - 7x^2 + 3x + 27$, (f) $-x^3 + 7$, (g) $2x^3 - (1 + 2\sqrt{2})x^2 + (\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{2}$.
5. Podana macierz jest macierzą izometrii. Czy ta izometria jest obrotem, czy symetrią obrotową? Wokół jakiej prostej? O jaki kąt?

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

-
6. Zdiagonalizuj macierz M : znajdź wartości własne i bazę wektorów własnych; zapisz M w postaci PDP^{-1} z diagonalnym D ; $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

7. Macierze A i A^{-1} mają całkowite wyrazy. Co wynika stąd o $\det(A)$?
8. Niech $X, Y, Z \in \mathbf{R}^3$ będą niezerowymi wektorami, A macierzą, zaś $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ dwoma różnymi liczbami, przy czym $AX = \lambda X$, $AY = \lambda Y$, $AZ = \mu Z$. Udowodnij, że jeśli X, Y są lnz, to X, Y, Z są lnz.
9. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$ – która z tych macierzy diagonalizuje się, a która nie?
10. Niech ciąg (a_n) będzie zadany rekurencyjnie: $a_0 = 1$, $a_1 = 7$, $a_2 = -1$, $a_{n+3} = 4a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n$. Wyprowadź jawny wzór na n -ty wyraz tego ciągu.
11. Następujące przekształcenia są izometriami $\mathbf{R}^3$; przedstaw każde z nich jako złożenie translacji i izometrii liniowej. Znajdź macierz części liniowej. (a) odbicie względem płaszczyzny $x + z = 1$; (b) odbicie względem prostej $x = z = 1$; (c) obrót o $\pi/2$ wokół prostej $y = z = 1$ (są dwa takie obroty; wybierz dowolny z nich).
12. Ślad pewnej izometrii wynosi -3 . Co to za izometria?
13. Znajdź macierz obrotu o $\frac{\pi}{6}$ wokół prostej $x = -y = \frac{z}{3}$, w którąkolwiek stronę. Następnie wytłumacz komuś w którą stronę obracałeś.
14. Znajdź macierz złożenia obrotu prawoskrętnego wokół prostej $X = t(2, 1, 2)^\top$ o kąt $\frac{\pi}{4}$ (przekształcenia $R_{(2,1,2)^\top, \frac{\pi}{4}}$) i odbicia w płaszczyźnie prostopadłej do osi tego obrotu.
15. Niech A będzie liniową izometrią $\mathbf{R}^3$ zmieniającą orientację, taką że liczba 1 jest jej wartością własną. Uzasadnij, że A jest odbiciem względem pewnej płaszczyzny.

-
16. Załóżmy, że macierz A ma 3 różne wartości własne, i że $AB = BA$. Uzasadnij, że macierz B jest diagonalizowalna.
 17. Jak może wyglądać zbiór wszystkich wartości własnych liniowej izometrii $\mathbf{R}^3$? Opisz wszystkie możliwości. Uwzględnij zespolone wartości własne.
 18. Udowodnij, że każda zachowująca 0 izometria $\mathbf{R}^3$ jest liniowa. [Robi się to podobnie jak dla $\mathbf{R}^2$.]
 19. Uzasadnij, że każda izometria $\mathbf{R}^3$ jest złożeniem co najwyżej czterech odbić (w płaszczyznach).
 20. Niech M będzie macierzą 2×2 o wyrazach całkowitych. Załóżmy, że $M^n = I$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n . Udowodnij, że $M^{12} = I$.