

Algebra liniowa 1R, lista 13

1. Napisz co najmniej trzy macierze izometrii w których pierwszym wierszem jest $(3/5, \sqrt{7}/5, -3/5)$.
2. Sprawdź, że jeśli macierze symetryczne A, B spełniają warunek

$$(\forall X \in \mathbf{R}^3)(\langle AX, X \rangle = \langle BX, X \rangle),$$

to $A = B$.

3. Napisz formę kwadratową Q na $\mathbf{R}^3$, taką że $Q((1, 2, 3)^\top) = -7$.
4. Niech $Q((x, y, z)^\top) = xy + yz + zx$. Wskaż wektor U , taki że: (a) $Q(U) = 1$; (b) $Q(U) = -1$; (c) $Q(U) = 0$.
5. Znajdź macierz izometrii liniowej F , takiej że $F((2, 2, -1)^\top) = (0, 3, 0)^\top$.
6. Znajdź macierz izometrii liniowej F , takiej że $F((2, 2, -1)^\top) = (1, -1, \sqrt{7})^\top$. Ile jest takich izometrii?
7. Znajdź symetryczną macierz $A \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$, taką że $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, a liczba 3 jest wartością własną A .
8. Znajdź symetryczną macierz $A \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$, taką że $\chi_A(x) = 2x^2 - x^3$, a każdy wektor płaszczyzny $2x + y + z = 0$ jest wektorem własnym A .
9. Podaj przykład macierzy symetrycznej $A \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$, takiej że wektory $(1, -1, 0)^\top$, $(0, 1, -1)^\top$ i $(1, 0, -1)^\top$ są jej wektorami własnymi, a wektor $(1, 2, 3)^\top$ nie jest jej wektorem własnym.
10. Podaj przykład macierzy symetrycznej S rozmiaru 3×3 oraz jej trzech liniowo niezależnych wektorów własnych, z których żadne dwa nie są prostopadłe.
11. Załóżmy, że X jest wektorem własnym macierzy $A \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$ spełniającej warunek $A^\top = I - A$. Udowodnij, że jeśli $Y \perp X$, to $AY \perp X$.
12. Załóżmy, że $A \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$ jest symetryczna, $AX = \lambda X$, $AY = \mu Y$, $\langle X, Y \rangle \neq 0$. Udowodnij, że wtedy $\lambda = \mu$. Wywnioskuj stąd, że każda liniowa kombinacja wektorów X i Y jest wektorem własnym A .
13. Udowodnij, że jeśli liniowo niezależne wektory $X, Y \in \mathbf{R}^3$ są wektorami własnymi macierzy symetrycznej $A \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$, to również wektor $X \times Y$ jest wektorem własnym tej macierzy.
14. Podaj przykład formy kwadratowej Q na $\mathbf{R}^3$, takiej że $Q(E_1), Q(E_2), Q(E_3) > 0$, ale dla pewnego $U \in \mathbf{R}^3$ mamy $Q(U) < 0$.
15. Niech Q będzie formą kwadratową na $\mathbf{R}^3$, zaś $U, V \in \mathbf{R}^3$ będą takie, że $Q(U) = -Q(V) = 1$. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele wektorów $W \in \mathbf{R}^3$, takich że $Q(W) = 0$.
16. Które macierze 2×2 dają się rozszerzyć do macierzy izometrii rozmiaru 3×3 ? Spróbuj sformułować różne warunki konieczne i różne warunki dostateczne.
17. Przedstaw elipsoidę o długościach półosi a, b, c jako obraz sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ przez odpowiednie przekształcenie liniowe $\mathbf{R}^3$. Znając wzór na objętość kuli i wiedząc jak zmienia się objętość pod wpływem przekształcenia liniowego oblicz objętość obszaru ograniczonego tą elipsoidą.
18. Oblicz objętość obszaru ograniczonego elipsoidą $x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 4yz = 1$.
19. Załóżmy, że $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ jest przekształceniem liniowym które diagonalizuje się w bazie (X, Y, Z) , i że ma ono trzy różne wartości własne. Udowodnij, że każdy wektor własny F jest skalarną krotnością wektora X , Y lub Z .
20. Załóżmy, że $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ jest przekształceniem liniowym, że diagonalizuje się w bazie (X, Y, Z) , i że ma dwie różne wartości własne – wartości własne odpowiadające wektorom X i Y są takie same. Udowodnij, że każdy wektor własny F jest kombinacją liniową wektorów X, Y lub skalarną krotnością wektora Z .