

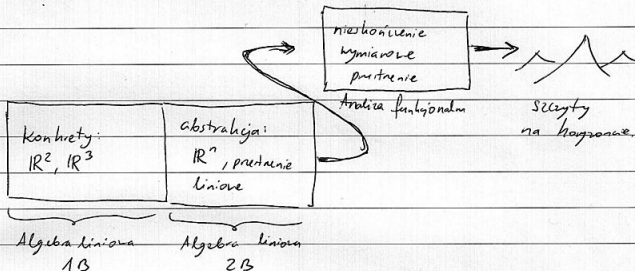
Piotr Śniady,

3.2007

(1)

Algebra liniowa 1B

plan:



po co ludzkości algebra liniowa?

sprawy techniczne; konsultacje, zaliczenie, ranne wstawanie

↑ w godzinach pokoju 707.

↳ warto z nich korzystać -

znaczenie poprawiają skuteczność

strona WWW (ulubiona wyszukiwarka, Piotr Śniady [TENERI](#)) zawiera RSS 

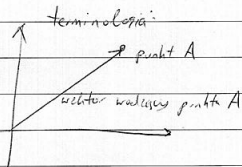
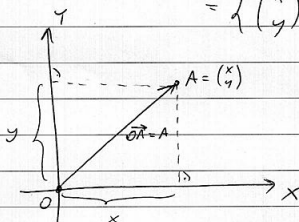
* mnóstwo równań w fizyce, ekonomii, ... to rowania liniowe
Rozwiązanie takich układów równań to domena algebry liniowej.

* 70% ~~stwierdzeń~~ ^{obiektów} matematycznych spotykanych w codziennej pracy matematyka to przestrzenie liniowe (czarem z dodatkowymi strukturami) lub odzwierciedlenia pomiędzy takimi przestrzeniami. Algebra liniowa dostarcza język, w którym możemy mówić o takich obiektach

$$\text{PEAS2C2Y2NA} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} =$$

②

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$



punkt $\cong$ wektor (zaczynający w 0)

$\cong$ $\parallel$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leftarrow$ współrzędne punktu / wektora

WEKTOR ZERO: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} = \vec{00} = \vec{0}$

taki piszą formalnie;

"wektor zerowy $\vec{0} \geq \vec{0}$ ".

taki piszą leniwo

(dopuszczalne)

ale można śmiało

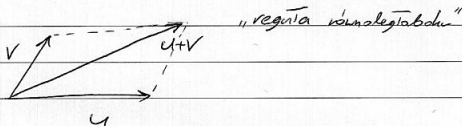
ponyć wektor $\vec{0}$ zerowy z

zerem $\in \mathbb{R}$.

3

DZIAŁANIA

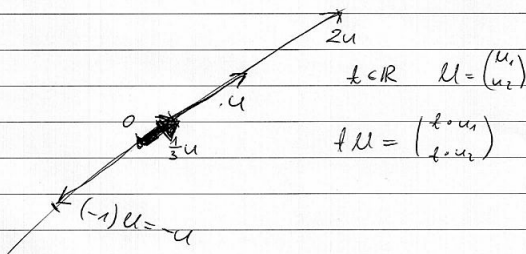
Dodawanie wektorów



$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$u+v = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{pmatrix}$$

mnożenie przez skalar (kierby)



Struktury (aksjomaty przestrzeni liniowej)

(4)

↓
downing to w 2. semestrze

dla dowolnych wektorów U, V, W i liczb $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$+ \left\{ \begin{array}{ll} (1) & (U+V)+W = U+(V+W) \quad [+ \text{ jest łączne}] \\ (2) & U+V = V+U \quad [+ \text{ jest przemienne}] \\ (3) & U+\vec{0} = U \quad [\vec{0} \text{ jest elementem} \\ & \quad \quad \quad \text{neutralnym} +] \\ (4) & \text{istnieje wektor } \vec{0} \text{ taki, że} \quad [\text{istnieje wektor przeciwny} \\ & \quad U+\vec{0} = \vec{0} \quad \quad \quad \text{do wektora } U] \end{array} \right.$$

$$\cdot \left\{ \begin{array}{ll} (5) & (\alpha \cdot \beta) U = \alpha \cdot (\beta \cdot U) \\ & \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \\ & \quad \text{mnożenie liczb} \quad \quad \quad \text{mnożenie} \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{wektora przez liczbę.} \\ (6) & 1 \cdot U = U \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (7) & (\alpha + \beta) \cdot U = \alpha U + \beta U \\ & \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ & \quad \text{dodawanie} \quad \quad \text{dodawanie} \quad \quad \text{[rozdzielność } \\ & \quad \text{liczb} \quad \quad \quad \text{wektorów} \quad \quad \text{względem} +] \\ (8) & \alpha (U+V) = \alpha U + \alpha V \end{array} \right.$$

↑
dodawanie wektorów

Nie użyć się na pamięć

5

Dowód

(2) $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$U+V = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{pmatrix}$$

$$V+U = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1+u_1 \\ v_2+u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{pmatrix}$$

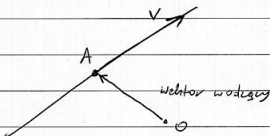
czyli

$U+V = V+U \quad \checkmark \quad \text{etc.}$

przebieganie dodawania
lub

{ porównanie punktów
 dowodu się
 bardzo
 analogicznie.

RÓWNANIA PROSTEJ



$$\rightarrow X = A + tV$$

(parametryzacja)

Przykład $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3t \\ 2+4t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2+4t \end{cases}$$

parametryczne
równanie prostej

Przejście do równania
ogólnego:

$$t = \frac{x-1}{3} \quad (z \text{ 1. równania})$$

podstawiamy do 2. równania: $y = 2 + 4 \cdot \frac{x-1}{3}$

równanie ogólne
prostej.

~~Równanie ogólne prostej:~~

~~$ax + by + c = 0$, a, b nie są jednocześnie zerami~~

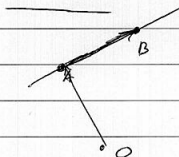
Namaginerie:
 kiedy postać parametryczną prostej
 (podobnie jak równanie ogólne prostej)
 nie są nie jest równaniem jednoznaczne.
 Pamiętaj to. Sformułuj nawiązując się do pytania.

6

Równanie ogólne prostej:

$$ax + by = c$$

a, b nie mogą być jednocześnie równe 0.



$$A + t(B - A)$$

Równanie parametryczne
 prostej przechodzącej przez
 A, B

Insider tip:

„Jeśli na kolokwium Wielki Zadaniodawca pyta o równanie parametryczne prostej, a zamiast tego
 podałeś równanie ogólne, Wielki Spruciel nie będzie sztywny”
 etc.”

Wzrost skalarny

Def. Niech $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Wzrostem skalarnym U i V nazywamy liczbę $u_1 v_1 + u_2 v_2$
 oznaczoną:

$$\langle U, V \rangle \quad (U | V) \quad \langle U | V \rangle \quad U \cdot V \quad U \cdot V$$

Przykład. $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$.

Wzrost skalarny – bardzo będzie się
 nam przydać przez całe życie!

(7)

Striendzenie. Dla dowolnych wektorów U, V, W
i skalarów $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

"dwuklinio-
wość"

$$(1) \quad \langle \alpha U + \beta V, W \rangle = \alpha \langle U, W \rangle + \beta \langle V, W \rangle$$

↗ "liniowy system 1. zmiennej"

$$\langle U, \alpha V + \beta W \rangle = \alpha \langle U, V \rangle + \beta \langle U, W \rangle$$

"liniowy system 2. zmiennej"

$$(2) \quad \langle U, V \rangle = \langle V, U \rangle$$

"iloczyn skalarny jest symetryczny"

} dowody są
bardzo proste -
potraktuj to
jako zadanie
domowe.

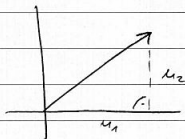
"dodatnia
definitość"

$$(3) \quad \langle U, U \rangle \geq 0, \text{ ponadto}$$

$$\langle U, U \rangle = 0 \Leftrightarrow U = 0$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\langle U, U \rangle = u_1^2 + u_2^2$$



$$\|U\| = \sqrt{\langle U, U \rangle}$$

"tw. Pitagorasa"

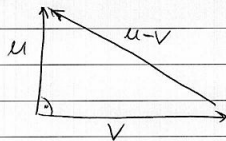
↑
długość U , norma U

⑧

Fakt. $\langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow u$ ist orthogonal zu v
($u \perp v$)

} Vektorraum ist 1. zu
dowolnege Vektoren.

Dowod.



($\Leftarrow$)

$$u \perp v \Rightarrow \|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u-v\|^2$$

tr. p. tagorasa

$$L = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle$$

$$\begin{aligned} P &= \langle u-v, u-v \rangle = \langle u, u \rangle - \langle v, u \rangle - \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = \\ &= \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle - 2 \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle u, v \rangle = 0$$

$$(\Rightarrow) \langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow \|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u-v\|^2 \Rightarrow$$

tr. additine
dotz p. tagorasa

$$u \perp v$$

□

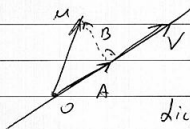
Wniosek: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ (9)
 „jaki wektor jest $\perp$ do $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i ma długość 1?”

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

↑ jest prostopadły (to dobre), ale
 ma inną długość. Trzeba to poprawić.

$$\text{Odp: } \pm \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ lub } \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Twierdzenie $\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \angle(u, v)$

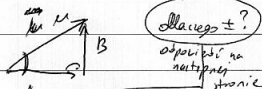


$$u = A + B \quad B \perp v$$

$$A = \alpha \cdot v \quad \text{dla pewnego } \alpha \in \mathbb{R}$$

liczymy α na dwa sposoby...

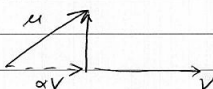
(1)



$$\cos \angle(u, v) = \frac{\pm \|A\|}{\|u\|} = \frac{\alpha \cdot \|v\|}{\|u\|}$$

$$\boxed{\alpha = \cos \angle(u, v) \cdot \frac{\|u\|}{\|v\|}}$$

(2)



$$\langle u - \alpha v, v \rangle = 0$$

$$\langle u, v \rangle - \alpha \langle v, v \rangle = 0$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}}$$

Konkluzja:

$$\cos \angle(u, v) = \frac{\|u\|}{\|v\|} = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}$$

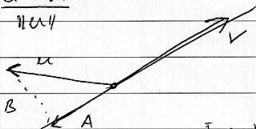
$$\langle u, v \rangle = \cos \angle(u, v) \cdot \|u\| \cdot \|v\|$$

□



UWAGA: obróć uwagę na ten przykład:

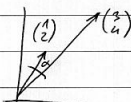
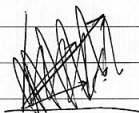
$$\cos \angle(u, v) = \frac{-\|u \cdot v\|}{\|u\|} = \frac{\alpha \cdot \|v\|}{\|u\|}$$



$$\langle u, v \rangle \leq 0$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \angle(u, v) \leq \pi$$

Przykład



$$\alpha = ?$$

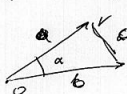
~~Pytanie 2.1.1:~~
~~Pytanie 2.1.2:~~
~~Pytanie 2.1.3:~~
~~Pytanie 2.1.4:~~
~~Pytanie 2.1.5:~~
~~Pytanie 2.1.6:~~
~~Pytanie 2.1.7:~~
~~Pytanie 2.1.8:~~
~~Pytanie 2.1.9:~~
~~Pytanie 2.1.10:~~

Pytanie 2.1.11:
dla danego wektora $\langle u, v \rangle$
a raz pisać $u \cdot v$?

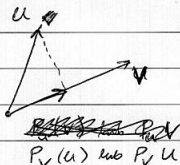
$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3 + 8}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{25}} = \frac{11}{5\sqrt{5}}$$

Odpowiedź:
aby zorientować
studentów.

$$\alpha = \arccos \frac{11}{5\sqrt{5}}$$



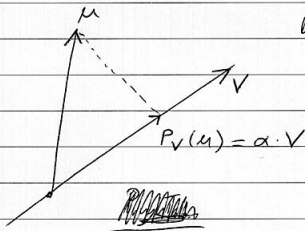
$$\begin{aligned} c^2 &= \|V - U\|^2 = \\ &= \langle V - U, V - U \rangle = \\ &= \langle V, V \rangle + \langle U, U \rangle - 2\langle U, V \rangle = \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2ab \cos \alpha \end{aligned}$$



$P_V(u)$ (11) $P_V(u)$
Przez ~~przez~~ [albo: ~~przez~~]

oznaczamy rzut prostopadły wektora u na prostą wyznaczoną przez wektor V .
jeżeli $V=0$ to ta definicja nie ma sensu.

Lepszy rysunek:



Wartość α jest polećniając. Zatem

$$P_V(u) = \frac{\langle u, V \rangle}{\|V\|^2} V$$

Jeżeli $\|V\|=1$, to

$$P_V(u) = \langle u, V \rangle \cdot V$$

$\pm$ długość rzutu wektora u na wektor V .

czy więc, dlaczego $\pm$? Ten znak ma znaczenie
o tym, czy $P_V(u)$ i V mają ten sam czy przeciwny zwrot.

Wskazówka: powyższą formułę

trochę się upraszcza, gdy $\|V\|=1$.

Przykład (niezbyt trudny)

Wektory $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$ wyznaczają tę samą prostą, zatem

$$P_{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_{\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow = \frac{3x+4y}{3^2+4^2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3x+4y}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y}{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} &= \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \right) \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ten bokić maie
travels ygnatit d la
Dygnara.

Mgdrujse spojruie na r6vnaie 6g6lne proutej.

(12)

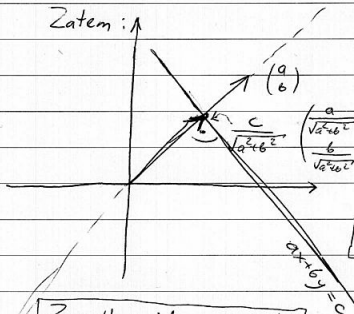
$$ax+by=c \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

↑ lepiej mieć tu wektor $\vec{F}$ i $\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

ale to jest $P \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow P \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$

Zatem:



$ax+by=c$ to prosta prostopadła do $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, której rzut na prosta wyznaczoną przez $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ jest równy $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$.

Wniosek 1 Wektorem normalnym [czyli: prostopadłym] do $ax+by=c$ jest np. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

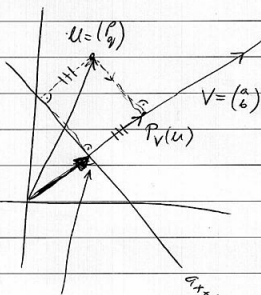
Zagadka: jaki wygląda ten obrazek, gdy $c < 0$?

Wniosek 2 Odległość prostej

$$ax+by=c \text{ od punktu } 0 \text{ wynosi } \left\| \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \right\| = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

↑ długość!

(13)



Jaka jest odległość punktu (p, q) od prostej $ax+by=c$?

Taka sama, jak wektor na prostej wyznaczony przez (a, b) punktu (p, q) i prostej $ax+by=c$

~~Wektor, który jest~~

wektorem $\vec{v}$ na prostej $ax+by=c$ ma

prostej wyznaczony przez $\vec{v}$

jest punkt $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right]$.

Zatem

odległość tych dwóch punktów to

$$\left| \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (ap+ bq) - \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| = \left| \frac{ap+ bq - c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|$$

ten sam wektor, który jest

wektorem tej prostej to

$$\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right]$$

[→ strona (12)]

Zagadka 1. Co mówi nam znak liczby $ap+ bq - c$?

Może warto mówić o odległości od prostej ze znakiem?

Zagadka 2. Dla jakich punktów (p, q) odległość

od prostej $ax+by=c$ wynosi 0? Zauważ, proszę!

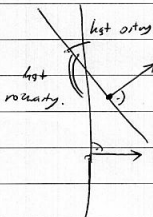
(14)

Pytania

Który pomieszczy $1 \cdot x + 2y = 10$ oraz $2x + 3y = 4$?

Taki sam, jak który pomieszczy
wektorami normalnymi, czyli
pomieszczy $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\cos \left[\angle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$$



[rysunki mają
realizację]

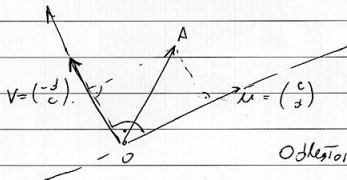
Zagadka: który to który? Są dwa.

"Czy musimy się uczyć tych dowodów?"

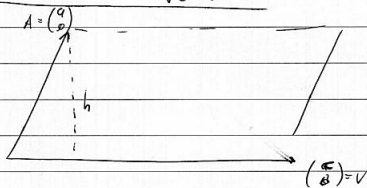
Nie, ~~gdy~~ na kolokwium i na egzaminie
nie jest wymagane znajomość (na pamięć)
dowodów twierdzeń z wykładu. Jeśli
student mógłby mieć nawet taki na
dobrą ocenę egzaminu nie mając ~~żadnych~~
żadnych dowodów z wykładu.

Tym niemniej warto zrozumieć dowody
z wykładu - to bardzo rozwija.

Jaka jest odległość punktu $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ od prostej $X \in \mathbb{R}^2$, $U = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$? (15)



$$\begin{aligned} \text{Odlegość} &= \|P_V(A)\| = \left\| P_{\begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \\ &= \left\| \frac{-ad+bc}{c^2+d^2} \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix} \right\| = \frac{|ad-bc|}{c^2+d^2} \sqrt{c^2+d^2} = \\ &= \frac{|ad-bc|}{\sqrt{c^2+d^2}} \end{aligned}$$



Pole równoległoboku
wspitego przez A, V :

$$S = h \cdot \|V\| = \frac{|ad-bc|}{\sqrt{c^2+d^2}} \cdot \sqrt{c^2+d^2} = |ad-bc|$$

Def. Wyznacznik par $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ nazywamy liczbą

$$\det \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

Pole równoległoboku wspitego przez U, V
wynosi $|\det(U, V)|$.