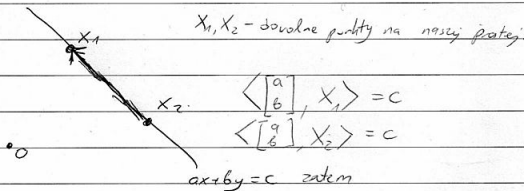


Appendiks do wykładu 1. (na ćwiczeniach)

(16)

Alternatywny sposób tego, że $ax+by=c$ jest prostopadła do $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$



$$\left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, x_1 - x_2 \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, x_1 \right\rangle - \left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, x_2 \right\rangle = c - c = 0$$

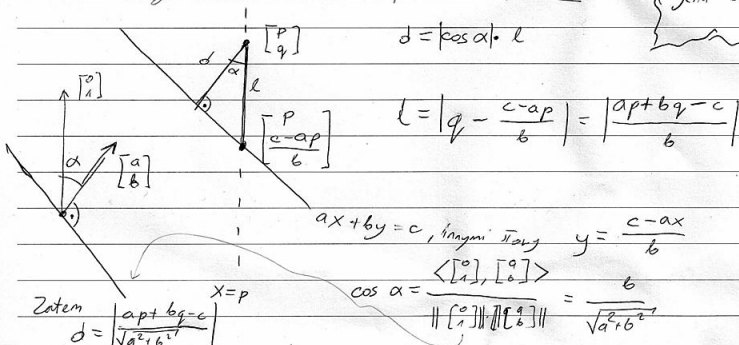
zatem

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \perp x_1 - x_2$$



Alternatywny rachunek odległości punktu od prostej.

Jeśli $b \neq 0$





FIELDS

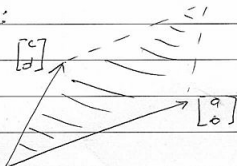
Wykład 2, 9 X 2007.

FIELDS INSTITUTE
Research in Mathematical Science
222 COLLEGE STREET, 2ND FLOOR
TORONTO, ONTARIO
M5T 3J1 CANADA
TEL 416 348.9710
FAX 416 348.9714
www.fields.utoronto.ca

WYZNACZNIK

(17)

Przypomnienie:



Pole równoległoboku wyprostego przez wektory $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ wynosi $|ad - bc|$.

Definicja: $\det \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Zatem pole równoległoboku

{Wzór na wyznacznik jest ważny i trzeba się go nauczyć na pamięć!}

FAKT: Pole równoległoboku wyprostego przez wektory U, V wynosi $|\det(U, V)|$.

teraz kartka (17A)

Definicja

(~~teraz~~ ~~min!~~)

~~Wektory U, V nazywamy ~~liniowo niezależnymi~~ (tzn.)~~

~~jeśli leżą na jednej prostej przechodzącej przez $\vec{0}$~~

Stwierdzenie (proste, na ćwiczenia)

17 A

$$(1) \det(\alpha U + \beta V, W) = \alpha \det(U, W) + \beta \det(V, W)$$

(dwuliniowość)

$$\det(U, \alpha V + \beta W) = \alpha \det(U, V) + \beta \det(U, W)$$

(2)

(antysymetryczności)

$$\det(U, V) = -\det(V, U)$$

dowód → zadanie domowe

Wniosek z (2):

$$\det(U, U) = -\det(U, U)$$

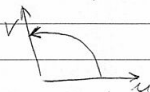
$$2 \det(U, U) = 0$$

$$\boxed{\det(U, U) = 0}$$

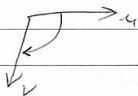
Tutaj wiemy, plus jest interpretacją wartości bezwzględnej wyznacznika.
A jaka jest interpretacja jego znaku?

Fakt.

$\det(U, V) > 0 \Leftrightarrow$ najkrótszy łuk obrotu od U do V jest przeciwwrotkowy („dodatni”)



$\det(U, V) < 0 \Leftrightarrow$ najkrótszy łuk obrotu od U do V jest wrotkowy („ujemny”)

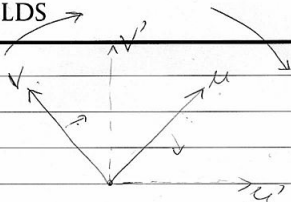




FIELDS

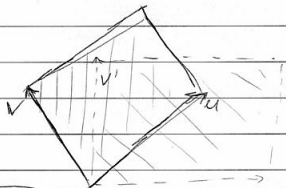
Dowód.

FIELDS INSTITUTE
Research in Mathematical Science
222 COLLEGE STREET, 2ND FLOOR
TORONTO, ONTARIO
M5T 3J1 CANADA
TEL 416 348.9710
FAX 416 348.9714
www.fields.utoronto.ca



17 B

Obracamy U, V tak, by wektor U' wskazywał wzdłuż osi OX .



$$|\det(U, V)| = |\det(U', V')|$$

Wartość bezwzględna wyznacznika to pole równoległoboku - podczas obrotu nie ulega zmianie.

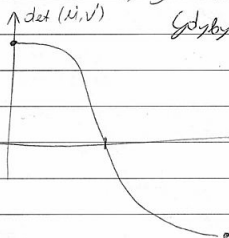
$$\det(U, V) = \pm \det(U', V')$$

Twierdzenie

$$\det(U, V) = \det(U', V') \text{ Gdyby tak nie było...}$$

Czy to możliwe, by $\det(U, V) = -\det(U', V') \neq 0$?

Gdyby tak było...



Uwaga; ten dowód wykorzystuje pojęcie ciągłości funkcji!

kąt obrotu

Dla pełnego półobrotowego kąta obrotu $\det(U', V') = 0$

$$\text{zatem } |\det(U, V)| \neq |\det(U', V')| \quad \swarrow$$

$$\text{Zatem } \boxed{\det(U, V) = \det(U', V')}.$$

oraz lgt pomieszy U, V jest taki sam, jak pomieszy U', V'

$$\det(U, V) = \det(U', V') \quad \text{zatem}$$

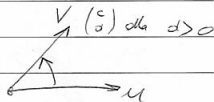
Mówi: wystarczą udowodnić ~~to~~ raz fakt w szczególnym przypadku, gdy

$$U = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \quad a > 0$$

~~Wtedy~~ Oznaczmy

$$V = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\det(U, V) = ad - 0 \cdot c = ad.$$



$$\det(U, V) > 0 \Leftrightarrow d > 0$$

Porozumienie i rozumienie że $d > 0 \Leftrightarrow$ lgt między U i V jest... $\square$

Def. Para uporządkowana (U, V) nazywamy dodatnio (ujemnie) zorientowaną, jeśli $\det(U, V) > 0$ ($\det(U, V) < 0$).

(na chwilę)

Zadanie. O parze (X, Y) wiadomo, że jest dodatnio zorientowana.

Jaki zorientowana jest para $(3X+2Y, 9X-7Y)$?

{ Wskazówka: $\det$ jest dwuliniowy i antysymetryczny }



Definicja: Wektory u, v nazywamy
współliniowymi, jeśli leżą na ~~prostej~~
prostej przechodzącej przez $\vec{0}$
(czyli są równoległe).

FIELDS INSTITUTE
Research in Mathematical Science
222 COLLEGE STREET, 2ND FLOOR
TORONTO, ONTARIO
M5T 3J1 CANADA
TEL 416 348.9710
FAX 416 348.9714
www.fields.utoronto.ca

(13)

Powyższa definicja jest równoważna z następującą:

Definicja D2:

Wektory u, v są ^{współliniowe} ~~liniowe~~, jeśli spełniony jest (co najmniej) 1 z warunków:

- (*) • istnieje $\alpha \in \mathbb{R}$ takie, że $u = \alpha v$
- (**) • istnieje $\beta \in \mathbb{R}$ takie, że $v = \beta u$

Dowód

(D1)

(D2)

Pierwsza definicja $\Rightarrow$ druga definicja.

- jeśli $u = \vec{0}$ to $u = 0 \cdot v$ czyli dla $\alpha = 0$ warunek (*) jest spełniony
- jeśli $u \neq \vec{0}$ to jest tylko jedna prosta przechodząca przez $\vec{0}$ i u . Jej równanie parametryczne to k.M. Zatem $v = \beta u$ dla pewnego $\beta \in \mathbb{R}$. Cytli (**) zachodzi. ✓

(D2)

(D1)

Druga definicja $\Rightarrow$ pierwsza definicja

(zadanie domowe, proste)

Przykłady

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = (-\frac{1}{2}) \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$

(*) spełniony

$\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = (-2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

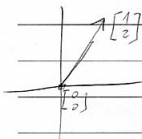
(**) spełniony



współliniowe

(19)

(b). $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, 



$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Warunek (*) spełniony

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Warunek (**) niespełniony

Wektory współliniowe.

(c). $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

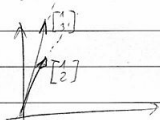
Wektory nie współliniowe



} dlaczego?

} proste o dwóch współrzędnych.

podzielone na 2 fakty



każde ma swoją definicję.

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Fakt. (i) U, V są współliniowe $\Leftrightarrow \det(U, V) = 0$

Def. U, V są liniowo niezależne $\Leftrightarrow \lambda U + \mu V = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$

Fakt (ii) U, V nie są współliniowe $\Leftrightarrow U, V$ są liniowo niezależne

~~$\Leftrightarrow \lambda U + \mu V = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$~~
(coś tam) są liniowo niezależne

Dowód $U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

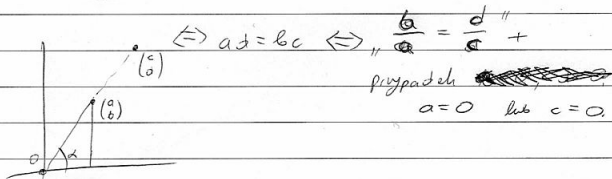
Wyrażenie postaci

$\lambda U + \mu V$ nazywamy

KOMBINACJA LINIOWA, U, V .

(20)

(i) twójdz 1 $\det(U, V) = 0 \Leftrightarrow ad - bc = 0 \Leftrightarrow$



twójdz 2 $\det(U, V) = 0 \Leftrightarrow$ [pole równolegoboku
rozpiętego przez U, V] $= 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ ten równolegobok jest zdegenerowany $\Leftrightarrow$
 $\vec{U}, \vec{V}$ są ~~współliniowe~~ leżą na jednej prostej $\Leftrightarrow$
 U, V są współliniowe.

(ii) U, V nie są współliniowe $\Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda U + \mu V = \vec{0} \\ L \qquad \qquad \qquad P \end{matrix} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$

$\neg L \Rightarrow \neg R$

$\neg L$: zakładamy, że $U = \alpha V$ lub $V = \beta U$

$1 \cdot U + (-\alpha) V = 0$

$\uparrow$
 $\neq 0$
wsc $\neg R$

$(-\beta) U + 1 \cdot V = 0$

$\uparrow$
 $\neq 0$
wsc $\neg R$.

(21)

$$\neg R : \exists \lambda, \mu \text{ takie, że } \lambda u + \mu v = \vec{0} \text{ oraz } \lambda \neq 0 \text{ lub } \mu \neq 0,$$

$$\lambda \neq 0 \text{ lub.}$$

$$\downarrow$$

$$u = \left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)v$$

$$\mu \neq 0$$

$$\downarrow$$

$$v = \left(-\frac{\lambda}{\mu}\right)u$$

□

Czy $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ są współliniowe?

Test 1: $\det \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1 \neq 0$

nie są współliniowe

Test 2. $\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} \lambda + \mu \\ 2\lambda + 3\mu \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 2\lambda + 3\mu = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = -\mu$$

$$\text{zatem } \mu = 0$$

$$\lambda = 0.$$

Zatem $\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu = 0.$

nie są współliniowe

Podsumowanie

$$u, v \text{ są l.n.z.} \Leftrightarrow u, v \text{ nie są współliniowe} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \det(u, v) \neq 0.$$

Układy równań liniowych

$$(*) \begin{cases} ax + cy = e \\ bx + dy = f \end{cases}$$

$a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ - współczynniki
 x, y - niewiadome

Interpretacja I Rozwiązanie $(*)$ to punkty wspólne dwóch prostych w $\mathbb{R}^2$.

Fakt. Jeśli $W = ad - bc$ (wyznacznik główny) jest różny od 0, wówczas $(*)$ ma jedno rozwiązanie.

Dowodź fakt w interpretacji I:

Dwie proste przecinają się w 1 punkcie $\Leftrightarrow$ są ni

~~proste~~ proste te są niewspółrędne $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ wektory normalne $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ są niewspółrędne

$\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc \neq 0$

23

Interpretacja II

$$\begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

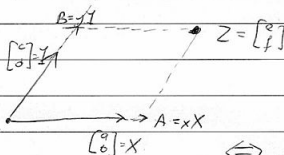
$$x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Równanie (*) to zapisujemy
prestawia wektor $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ jako
kombinacji liniowej wektorów
 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

Dowód fałtu drugi

$$W = ad - bc \neq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \text{ s\kern-1pt\text{\'a}} \text{ niez\kern-1pt\text{\'a}d\kern-1pt\text{\'n}y}$$

niez\kern-1pt\text{\'a}d\kern-1pt\text{\'n}y



$\Leftrightarrow$

da się wyrazić jako kombinację
to daje punkt xX .

zatem

$$Z = A + B = xX + yY$$

Proste te przecinają się w jednym
punkcie $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ s\kern-1pt\text{\'a} \text{ niez\kern-1pt\text{\'a}d\kern-1pt\text{\'n}y}

Gdyby istniało inne rozwiązanie $x'X + y'Y = Z$, to nie .

$$xX + yY = x'X + y'Y$$

(linowa niezależność)

$$(x - x')X + (y - y')Y = 0 \Rightarrow x - x' = y - y' = 0 \Rightarrow x = x', y = y'$$

□

24

Dowod faktu, twier.

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Stwierdzenie: $x, y \in \mathbb{R}$, takich że $xX + yY = Z$

$$\begin{pmatrix} W_Y \\ W_X \end{pmatrix}$$

$$\det(X, Z) = \det(X, xX + yY) = x \det(X, X) + y \det(X, Y)$$

$$y = \frac{\det(X, Z)}{\det(X, Y)}$$

$\leftarrow \dots$ $\begin{cases} \text{Wzrosty z warunkiem} \\ \det(X, Y) \neq 0. \end{cases}$

$$\det(Z, Y) = \det(xX + yY, Y) = x \det(X, Y) + y \det(Y, Y)$$

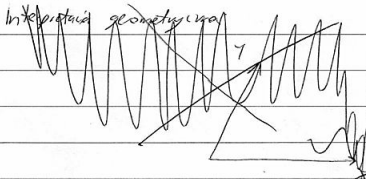
$$x = \frac{\det(Z, Y)}{\det(X, Y)}$$

$$\begin{pmatrix} W_X \\ W_Y \end{pmatrix}$$

"Wzrosty wyznaczające / wzrosty Cramera".

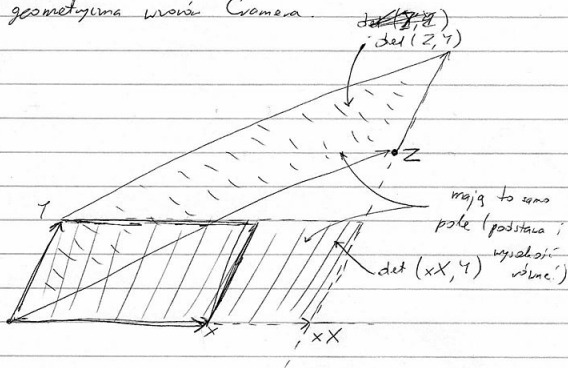
Wniosek: jeśli x, y istnieją, to muszą być zerowe
paryżymi wzorami. Zadanie domowe: sprawdzić, że x, y potane
gdyżby rozwiązać ~~z~~ są wzorami Cramera.

Interpretacja geometryczna



Uwaga:
 $W = \det(X, Y)$ to
"wyznacznik słupowy".
 $W_X = \det(Z, Y)$
 $W_Y = \det(X, Z)$

Interpretacja geometryczna wzoru Cramera



$$x = \det \frac{\det(x, y, z)}{\det(x, y)} = \frac{\det(z, y)}{\det(x, y)}$$

Przekształcenia przesuwające

(26)

(niepotrzebna) definicja: Przekształceniem przesuwającym nazywamy funkcję $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, czyli funkcję $F: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto F\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix}$

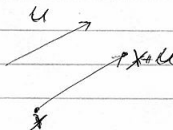
} takie przekształty

Ważne przekształty

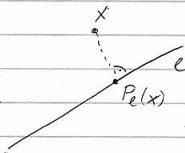
1) translacja o wektor u

$$T_u: X \mapsto X + u$$

$$T_{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \end{bmatrix}$$



2) ~~przekształcenie przesuwające~~
rzut prostokątny na
prostą l :



Jeśli l nie przechodzi przez O ,
wtedy są konieczne zmiany.

Rzut prostokątny na prostą

$$X = l + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} u$$

$$u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

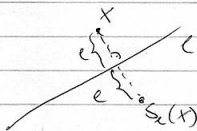
$$P_{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}(x) = \frac{\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \rangle}{\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \|^2}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} =$$

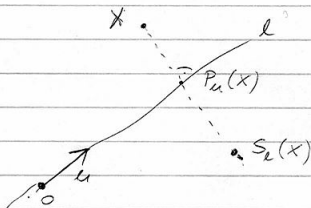
$$= \left[\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} x + \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} y \right]$$

$$(P_u(X) = \frac{\langle X, u \rangle}{\|u\|^2} \cdot u)$$

- 3) symetria osiowa
 $X \mapsto S_e(X)$



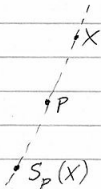
symetria względem prostej $X = l \cdot [u]$



$$X - P_u(X) = \cancel{P_u(X) - S_e(X)}$$

$$S_e(X) = \cancel{2} P_u(X) - X$$

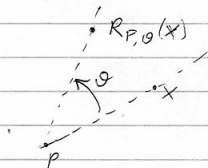
- 4) symetria środkowa
 względem punktu P.



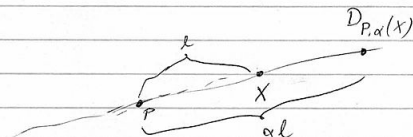
Z. dom: wieś, na

$$S_p(X) = ?$$

(28)

5) Obrót wokół P o kąt θ 

6) skalowanie (dylatacja, jednostajność)



Co się dzieje, jeśli

• $\alpha < 0$?• $\alpha = -1$?

$$S_P(\text{płaskość}) = D_{P, -1}(\text{płaskość})$$

• $\alpha = 1$?7) Przekształcenie identyfikacyjne
(tożsamość)

$$\text{Id}(X) = X$$

8) Przekształcenie zerowe:

$$Z(X) = \vec{0}$$

} ta notacja: Z } $\underline{NIE}$ jest powszechnie
używana!

Przekształcenia liniowe

29

Def. Przekształcenie $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest liniowe jeśli

jest postaci

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \quad \text{dla pewnych } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

zależnych od F .

Fakt. Niech $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

NWSR =

= następujące warunki są równoważne.

NWSR

(1) F jest liniowe

(2) $\left\{ \begin{array}{l} \bullet (\text{addytywność}) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \quad F(x+y) = F(x) + F(y) \\ \bullet (\text{jednorodność}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \quad F(\alpha x) = \alpha F(x) \end{array} \right.$

(3) $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y)$

(1) $\Rightarrow$ (2)

(2) $\Rightarrow$ (3)

Dowód:

(1) $\Rightarrow$ (2) proste zadanie domowe.

Zagadka: które z przykładów ~~jest~~ są przekształceniami liniowymi, a które nie?

(2) $\Rightarrow$ (3)

$$F(\alpha x + \beta y) \stackrel{(\text{addyt.})}{=} F(\alpha x) + F(\beta y) \stackrel{(2 \times \text{jednor.})}{=} \alpha F(x) + \beta F(y)$$

$$\alpha F(x) + \beta F(y)$$

(3) $\Rightarrow$ (1).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= E_1} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= E_2}$$

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F(x E_1 + y E_2) = x \underbrace{F(E_1)}_{= \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}} + y \underbrace{F(E_2)}_{= \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \quad \square$$

Def. Jeśli $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ to

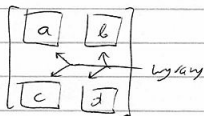
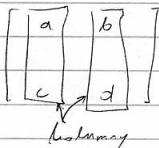
$$m(F) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ nazywany macierz}$$

przetransformacji $\cdot F$.

Uwaga: odpowiedniości między przetransformacjami liniowymi planu a macierzami 2×2 jest wrażliwie jednoznaczna.

czyli zdanie „różne przetransformacje liniowe” to to samo, co „różne macierze przetransformacji liniowej...”

Zadanie 2.45.10.



Fakt. Kolumnami macierzy $m(F)$ są wektory $F(E_1), F(E_2)$

$$m(F) = \begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix}$$

$F(E_1) \quad F(E_2)$

przyjmujemy:
 $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
 $E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
 to tw. wektory bazy.