

IzometrieDef. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nazywamy izometryj jeśli

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2 \quad d(x, y) = d(F(x), F(y))$$

czyli

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2 \quad \|x - y\| = \|F(x) - F(y)\|$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d(x, y) \text{ to} \\ \text{odległość } x \text{ od } y \end{array} \right.$$
Przykłady: obrót R_θ

Id.

 S_e T_u Fakt. Złożenie izometrii jest izometryj.Dowód.Fakt. Jeśli F jest izometryj $\mathbb{R}^2$, to F jest złożeniem pewnej izometrii F' zachowującej $\vec{0}$; translacji.Dowód

$$u = F(\vec{0})$$

$$F' := \underbrace{T_{-u} \circ F}_{\text{izometria}}$$

$$F'(\vec{0}) = T_{-u}(F(\vec{0})) = F(\vec{0}) - u = \vec{0}$$

$$T_u \circ F' = T_u \circ T_{-u} \circ F = F.$$

Fakt. Jeśli F - izometria ; $F(\vec{0}) = \vec{0}$

(np. gdy F jest izometryzowaniem)

to F zachowuje długość wektorów, tzn

$$\|F(X)\| = \|X\|$$

Dowód

$$\|F(X)\| = \|F(X) - \vec{0}\| =$$

$$= \|F(X) - F(\vec{0})\| = \angle(F(X), F(\vec{0})) =$$

$$= \angle(X, \vec{0}) = \|X\|$$



Trick $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometria, $F(\vec{0}) = \vec{0}$.

(3)

Wskaz F jest liniowa.

Dowod. ~~$\forall x, y \in \mathbb{R}^2$~~

$$Z := F(\alpha X + \beta Y) - \alpha F(X) - \beta F(Y).$$

$$\langle Z, Z \rangle = \langle F(\alpha X + \beta Y), F(\alpha X + \beta Y) \rangle -$$

$$- \alpha \langle F(\alpha X + \beta Y), F(X) \rangle - \beta \langle F(\alpha X + \beta Y), F(Y) \rangle$$

$$- \alpha \langle F(X), F(\alpha X + \beta Y) \rangle + \alpha^2 \langle F(X), F(X) \rangle$$

$$+ \alpha \beta \langle F(X), F(Y) \rangle$$

$$- \beta \langle F(Y), F(\alpha X + \beta Y) \rangle + \alpha \beta \langle F(Y), F(X) \rangle$$

$$+ \beta^2 \langle F(Y), F(Y) \rangle =$$

$$= \langle \alpha X + \beta Y, \alpha X + \beta Y \rangle - \alpha \langle \alpha X + \beta Y, X \rangle$$

$$- \beta \langle \alpha X + \beta Y, Y \rangle$$

$$- \alpha \langle X, \alpha X + \beta Y \rangle + \alpha^2 \langle X, X \rangle + \alpha \beta \langle X, Y \rangle$$

$$- \beta \langle Y, \alpha X + \beta Y \rangle + \alpha \beta \langle Y, X \rangle + \beta^2 \langle Y, Y \rangle$$

$$= \alpha^2 \langle X, X \rangle \cdot ? + \alpha \beta \langle X, Y \rangle \cdot ?$$

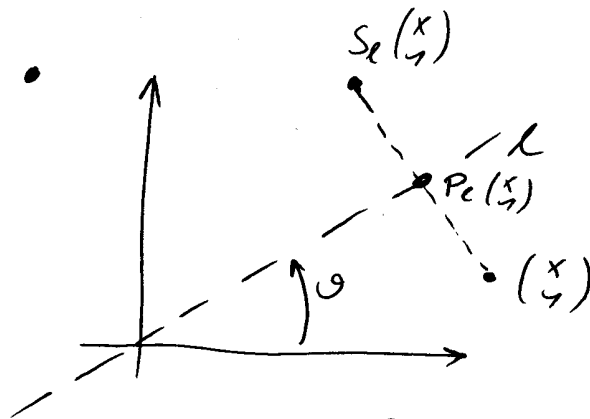
$$+ \beta^2 \langle Y, Y \rangle \cdot ? = 0.$$

$$Z = 0.$$

□

Průhlady izometrií lineárních.

• R_θ $m(R_\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$



S_θ

$$\left. \begin{aligned} S_\theta(x) - P_L(x) &= P_L(x) - Id(x) \\ \text{zde} \\ S_\theta(x) &= 2 P_L(x) - Id(x) \\ m(S_\theta) &= 2 m(P_L) - I = \\ &= 2 \begin{bmatrix} \cos \theta \cdot \cos \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \cdot \sin \theta & \sin \theta \cdot \sin \theta \end{bmatrix} - I = \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cos^2 \theta - 1 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin^2 \theta - 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}$$

Proz. dráží:

$$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$$

zatem

$$\boxed{S_\theta = R_{2\theta} \circ S_x}$$

Fakt. Niech A -macierz 2×2 .

~~WRS~~

NWSR.

- (1) A jest macierzą izometrii liniowej
- (2) kolumny A są prostopadłe i mają długość 1.
- (3) $A^T A = I$ $\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \\ \text{"macierz transponowana"} \end{array} \right.$
- (4) $A^* A^T = I$
- (5) wiersze A są prostopadłe i mają długość 1.
- (6) $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ lub $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$
dla pewnego α .

Dowód

$$(1) \Rightarrow (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} F(E_1) & F(E_2) \end{bmatrix}$$

$$\|F(E_1)\| = \|E_1\| = 1$$

$$\|F(E_2)\| = \|E_2\| = 1.$$

$$\langle F(E_1), F(E_2) \rangle = \langle E_1, E_2 \rangle = 0.$$

✓.

(2) $\Rightarrow$ (3)

6

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [V_1 \ V_2]$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ba + dc & b^2 + d^2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \langle V_1, V_1 \rangle & \langle V_1, V_2 \rangle \\ \langle V_2, V_1 \rangle & \langle V_2, V_2 \rangle \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

(3) $\Rightarrow$ (4).

$$A^T A = I \Rightarrow \det A \neq 0, \text{ A ma matrixe } \checkmark$$

$$A^T A = I \quad / \cdot A^{-1}$$

$$A^T = A^T A A^{-1} = A^{-1} \quad / A.$$

$$A \cdot A^T = A \cdot A^{-1} = I. \quad \checkmark$$

(4) $\Rightarrow$ (5)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases} \checkmark$$

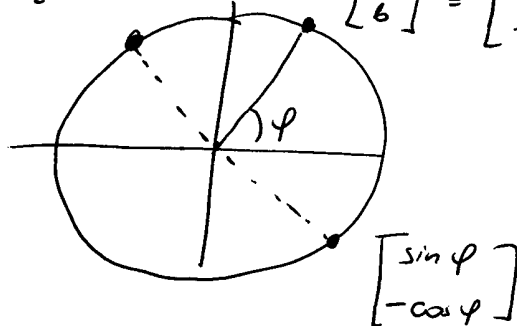
$$A A^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ca + db & c^2 + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \uparrow \checkmark$$

(5) $\Rightarrow$ (6).

⑦

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$a^2 + b^2 = 1$$



$$\text{or } \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{bmatrix}$$

$-\varphi = \alpha$ et voilà!

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \varphi \quad \checkmark$$

(6) $\Rightarrow$ (1)

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = m(R_\alpha)$$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix} = m(S_\alpha)$$

D.

8

Fakt. Isometria linearna F -planarny jest

- obrotem $\Leftrightarrow \det F \geq 1$
- symetria $\Leftrightarrow \det F = -1$

(i nie ma innych!)

Fakt.

A jest macierz

izometrii $\Rightarrow$

A jest odwracalna i

$$A^{-1} = A^T$$

Dowód

$$A^T A = I$$

zatem $A \neq 0$.

$$A^T A = I \quad / \cdot A^{-1}$$

$$\boxed{A^T = A^{-1}}$$

✓. $\square$

Ćwiczenie.

Oblicz wartości i wektory własne macierzy

$$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1-2\sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & 1-2\cos^2\theta \end{bmatrix} =$$

(przydatne do liczenia wektorów własnych odpowiadających $\lambda = 1$)

$$= \begin{bmatrix} 2\cos^2\theta - 1 & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & 2\sin^2\theta - 1 \end{bmatrix}$$

(przydatne do liczenia wektorów własnych $\lambda = -1$)