

Krywe stopnia 2

Lista cwić 6

1

(stwierdzenia, koniki, kwadraty...)

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \quad (*)$$

W. kwadratowe

W. liniowe

W. wolne

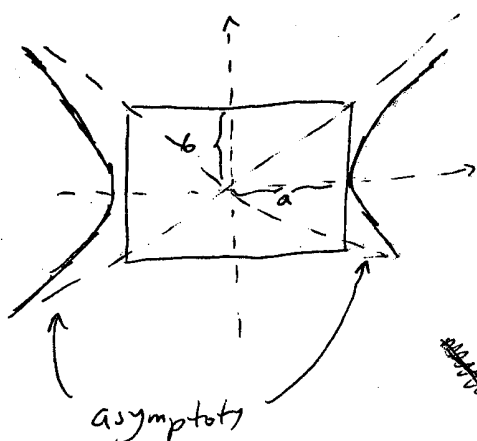
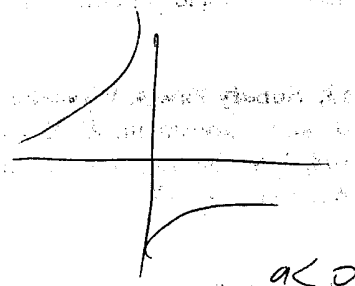
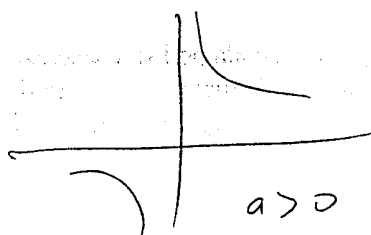
! te dwójki spracuj kłopot!

Przykłady: okrąg o środku (x_0, y_0) promień R

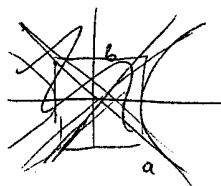
• pusta krąg $x^2 + y^2 + 1 = 0$

• elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (obwód okręgu $x^2 + y^2 = 1$ przez punkty $(a, 0)$ i $(0, b)$)

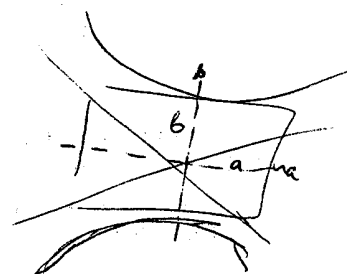
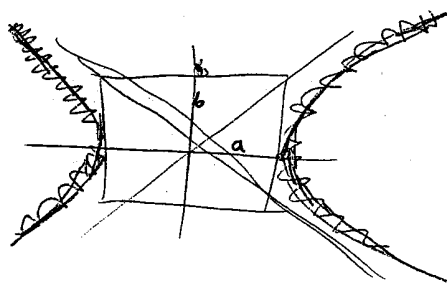
• hiperbola $xy = a$



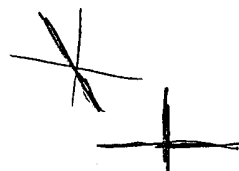
$$* \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = +1$$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$



* $x^2 = 0$ prosta
 $(x+y)^2 = 0$ $x^2 + 2xy + y^2 = 0$
 * para prostych przecinających się
 * dwa prostych no. $xu = 0$



* para prostych równoległych

Krzywe stopnia 2

np. $-x^2 + 4xy + 2y^2 - 7x + 2y + 5 = 0$
co to jest?

(2)

Cel: dobrać układ wp., i którym (*) będzie możliwie proste.

Def. 1. liniowy układ wp. jest zadany przez parę linc. wektorów

(U, W) . Współrzędne wektora X w takim ukł. to

współczynniki α, β w przedstawieniu $X = \alpha \cdot U + \beta \cdot W$.

Taki układ jest prostokątny, jeśli $\|U\| = \|W\| = 1, U \perp W$.

Ogólnie: taki prostokątny układ współrzędnych powstaje ze standardowego przez pewną izometrię:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $U \quad W \quad P$

lin. układ współrzędnych o innym początku.

izometria

jeśli zmieniamy początek układu współrzędnych

wyrażamy x, y przez x', y' , ale musimy też na odwrót.

~~Przykład 1~~

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$$

najpierw uprzączamy wyrazy kwadratowe („diagonalizacja formy”)

badanie formy kwadratowej

$$a'x'^2 + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f'$$

kiedy uproszczymy w kwadratach...

uprzączamy powiększamy i.s. wyrazów liniowych!

krok 1

krok 2

???

$$a''x''^2 + c''y''^2 + f'' = 0$$

lub kilka innych podobnych postaci

Znalezienie układu współrzędnych, w którym (*)

przebiega małżwie postę postać moine wykonac na
du sposoby

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$$

najpierw
upraczczamy
wyraz kwadratowe
(indiacjonalizacja
formy)

$$a'x'^2 + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f'$$

potem
porobymy sie
wyrazu liniowych

$$a'x''^2 + c'y''^2 + f''$$

(lub kilka innych prostych postaci).

najpierw
porobymy sie
wyrazu ~~kwadratowych~~
liniowych

$$ax''^2 + 2bx'y'' + cy''^2 + f''$$

potem upraczczamy
~~porobymy~~ sie wyraz
kwadratowe

Obie metody sa dobre, ale lewa metoda jest lepsza!

Poród: nie zawsze da sie usunac wyraz liniowe - w takim przypadku
metoda z lewej strony jest prostsza.

$$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} ax+by \\ bx+cy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + bxy + bxy + cy^2 =$$

$$= ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Def $Q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \stackrel{=}{=} \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = ax^2 + 2bxy + cy^2$, gdje $a, b, c \in \mathbb{R}$
nazivamo f. kvadratura.

Np. $Q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \stackrel{=}{=} -x^2 + 4xy + 2y^2$

$$m(Q) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$Q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \stackrel{=}{=} x^2$

$$m(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Funkcije $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ nazivamo forme kvadrature, jeri jest

ona postavi Matricu forme kvadrature

nazivamo $m(Q) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Inne sposoby określania $m(Q)$.

1) $m(Q)$ to taka macierz symetryczna, że $\forall U \in \mathbb{R}^2$

$$Q(U) = \langle m(Q)U, U \rangle.$$

$$\text{Pr. } -x^2 + 4xy + 2y^2 = \left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

2) $m(Q)$ to taka m. symetryczna, że $\forall U \in \mathbb{R}^2$

$$Q(U) = U^T m(Q) U$$

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad m(Q) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ to}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T = (x \ y)$$

$$U^T m(Q) U = (x \ y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \ y) \begin{pmatrix} ax+by \\ bx+cy \end{pmatrix} =$$

$$= ax^2 + bxy + bxy + cy^2 =$$

$$= ax^2 + 2bxy + cy^2. \quad \checkmark$$

Uwaga.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Zatem

$$\langle U, W \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle = u_1 w_1 + u_2 w_2 =$$

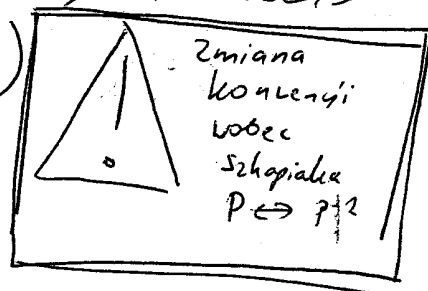
$$U^T W.$$

Jak zmienia się macierz formy Q , gdy przechodzimy do nowych
kt. współrzędnych $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$? $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\uparrow$ P - odwrotne.

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ w nowych współrzędnych}$$



$$Q(U) = U^T A U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left[P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right]^T A \left[P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right] =$$

$$= (x' \ y') \left(P^{-1} \right)^T A P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Jak A transformuje się do A' ...

$$A' = P^T A P$$

A' , macierz formy w nowych kt. współrzędnych $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$A'^T = \left[\left(P^{-1} \right)^T A P^{-1} \right]^T = \left(P^{-1} \right)^T A^T P^{-1} = \left(P^{-1} \right)^T A P^{-1} = A'$$

zatem jest symetryczna ok!

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T$$

A jak się zmienia macierz przekształcenia liniowego $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$?

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$A' = P^{-1} A P$$

→ zadanie?

[Signature] 32

Twierdzenie spektralne

(3²/₈)

Niech A będzie m. symetryczną ($A = A^T$). Wtedy istnieje
wzajemnie prostopadłe U, W mające A taką, że $\|U\|=1, \|W\|=1$,
 $U \perp W$, w kanonicznej $A = P D P^{-1}$, gdzie P jest
macierzą ortogonalną, zaś D - diagonalna.

Dowód.

$$\det(A - x \cdot I) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = (a-x)(c-x) - b^2 = \\ = x^2 - (a+c)x + ac - b^2$$

$$\Delta = (a+c)^2 - 4ac + 4b^2 = \\ = a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0.$$

Zatem istnieją
 rzeczywiste
wartości własne!

1) $\lambda \neq \mu$

Mogę wybrać wektory U, W t.j.

$$AU = \lambda U \quad \|U\| = 1$$

$$AW = \mu W \quad \|W\| = 1$$

~~domat~~ ~~zaw.~~

Pokaż, że $U \perp W$.

$$\text{domat } \langle BX, Y \rangle = \langle X, B^T Y \rangle \quad \square$$

czy
na
kółce
czarna?

$$\langle AU, W \rangle = \langle U, A^T W \rangle$$

"

"

$$\langle \lambda U, W \rangle$$

$$\langle U, AW \rangle$$

"

"

$$\lambda \langle U, U \rangle$$

$$\langle U, \mu W \rangle$$

"

$$\mu \langle U, W \rangle$$

$$\langle U, W \rangle = 0$$

$$(\lambda - \mu) \langle U, W \rangle = 0$$

$$\langle U, W \rangle = 0 \quad \square$$

2) $\lambda = \mu \Rightarrow \Delta = 0$, cnd.

$$a = c, \quad b = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

Na przykład:

$$U = e_1 \quad W = e_2$$

$\square$

Diagonalizacja formy

$$Q(x) = x^T A x.$$

standardowa
kwadratowa
diagonalizacji
macierzy.

Istnieje macierz izometrii P i macierz diagonalna D takie
 $A = P D P^{-1}$ $P = [U \ W]$ ortogonalne wektory
 własne A o długości 1.

$$Q(x) = x^T P D P^{-1} x = \underbrace{(x^T P^{-1})^T}_{X'^T} D \underbrace{P^{-1} x}_{X'} =$$

$$= \underbrace{(x^T P^{-1})^T}_{X'^T} D \underbrace{P^{-1} x}_{X'}$$

$P = (P^{-1})^T$
 $\uparrow$
 $P^T = P^{-1}$ izometria.

$$X' = P^{-1} x$$

Zatem

X' - współrzędne wektora x w
 nowym układzie współrzędnych,
 w nim macierz Q jest $D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$.

$$Q(x') = x'^T D x' = \lambda x'^2 + \mu y'^2.$$

$$x' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Przykład.

$$-x^2 + 4xy + 2y^2$$

$$Q(x) = -x^2 + 4xy + 2y^2$$

$$m(Q) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$w. charakt = x^2 - 1x - 6.$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 6 = 25.$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

czyli

$$\lambda = 3$$

$$\lambda = -2$$

system
wektorów
własnych

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x + 2y \\ 2x - y \end{bmatrix}$$

$$np. \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ 2x - y \end{bmatrix} \quad P=21$$

- 7 XI 2006 -

6

Wektory własne mający normę 1, by mieć diagonal 1.

Wektory

W. własne:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

(ortogonalne?)

czyli

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}}_{P, \text{ izom. (obrot!)}} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}}_{P^{-1} = P^T}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

~~Własności~~

$$\Phi(x', y') = 3 \cdot x'^2 - 2 y'^2$$

Udowodnijmy, że istnieje przekształcenie!

Fakt. Każda forma $\downarrow$ przyjmuje w pewnym układzie

Wp...

kanoniczna
portaj diagonalizacja

$$\Phi(x', y') = \lambda x'^2 + \mu y'^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$\uparrow$

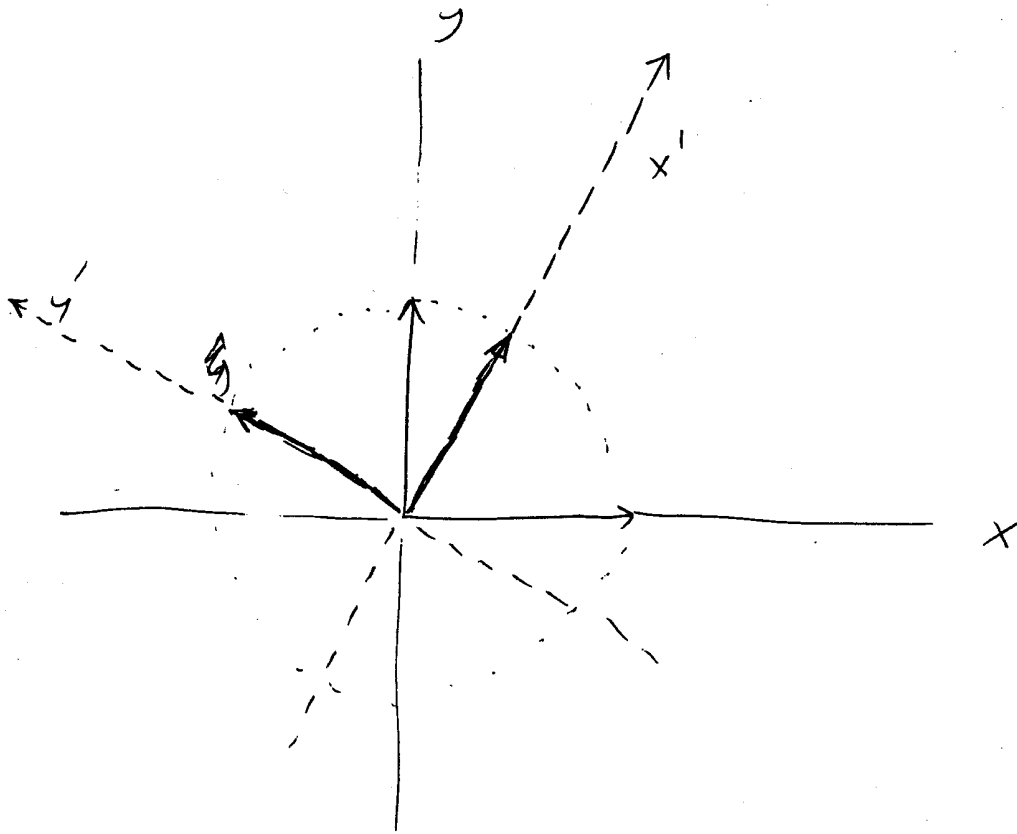
izometria

Wniosek: Każda krzywa portaj $\Phi(x) = g$

Wpstryśniętych przyjmuje portaj kanoniczną

w pewnym przekształceniu ortogonalnym
... $\sqrt{2} + 1 \cdot 1^2 = a$

Jak wygląda te unitaty współrzędnych?



Wystarczy zobaczyć, jak wyglądały wektory nowego układu współrzędnych!

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 1 \end{cases}$$

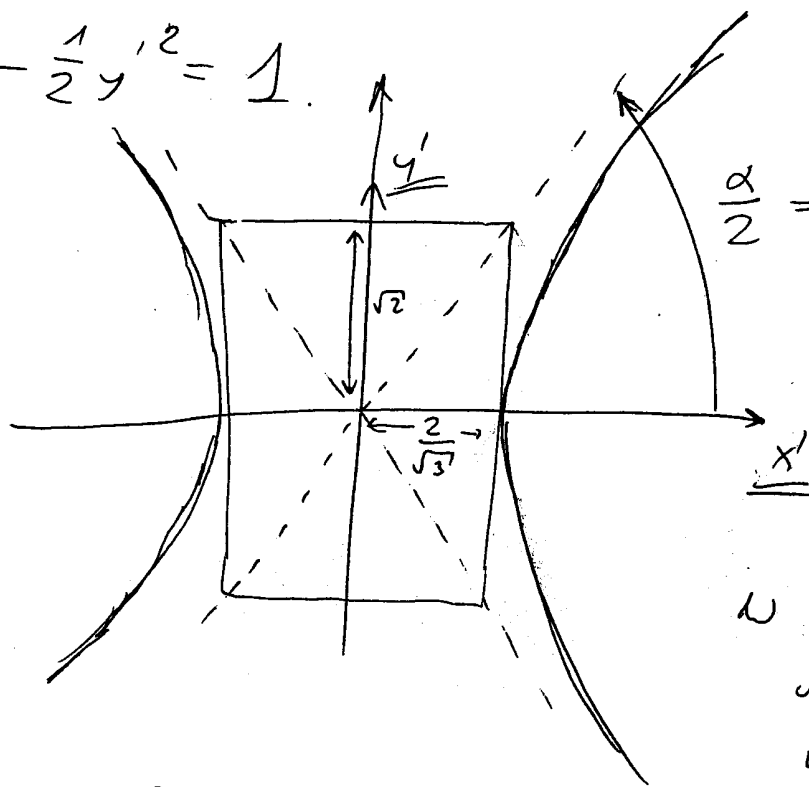
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

7) Przykład. Co to za krzywa?

$$-x^2 + 4xy + 2y^2 = 4 \quad ?$$

$$3x'^2 - 2y'^2 = 4$$

$$\frac{3}{4}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 = 1$$



$\frac{\alpha}{2}$ = „kąt półrozwarcia asymptot”

W naszym układzie współrzędnych

$$\frac{x'^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} - \frac{y'^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

hiperbola.

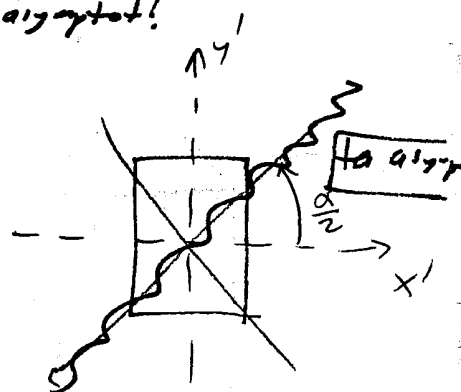
Wyraź hiperbola. Jakie równania asymptot?

$$\frac{3}{4}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 = 1.$$

$$\left(\frac{x'}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}\right)^2 - \left(\frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$

$$\left(\frac{x'}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)^2 - \left(\frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0 \leftarrow \text{R. asymptot!}$$

$$\left(\frac{x'}{\frac{2}{\sqrt{3}}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'}{\frac{2}{\sqrt{3}}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$



$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{y'}{x'} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Równania asymptot} \\ \frac{x'}{\frac{2}{\sqrt{3}}} \pm \frac{y'}{\sqrt{2}} = 0. \end{array} \right\}$$

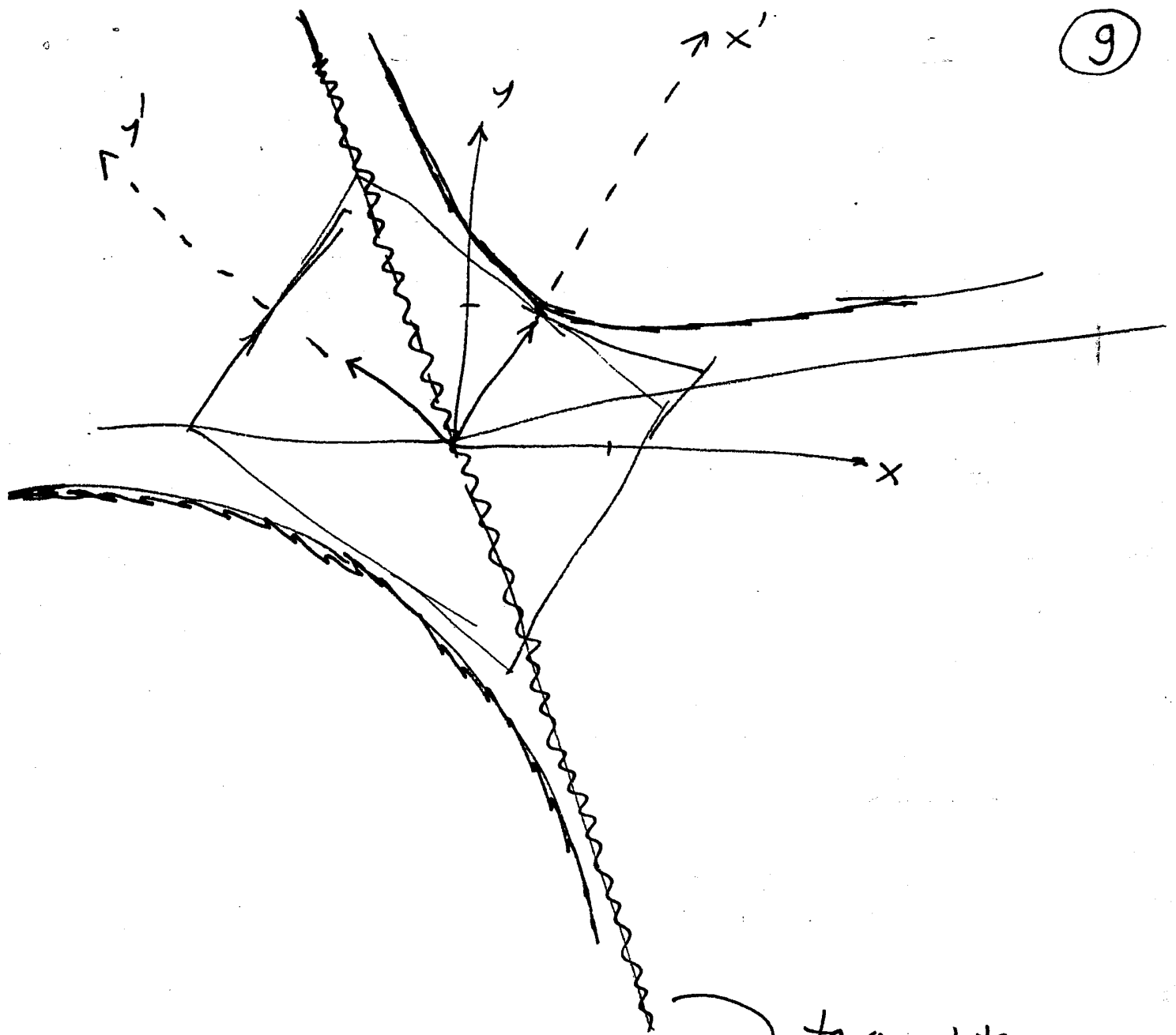
"kąt
półrozwiania
asymptot".

Równania asymptot w współrzędnych x, y ?

Równania osi Ox', Oy' $(-1, 1, -)$?

Jak wyrazić $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ przez $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$? i odwrotnie?

(9)



R. asympt.

to asymptote.

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}y}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) x + \left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 2} - \frac{2\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{3}} \right) y = 0.$$

$$(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})x + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})y = 0.$$