

Krzywa stopnia 2

część II

①

Co umożliwia wyznaczenie tem?

Kiedy forma kwadratowa

$$Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

↓ symetria

w pewnym prostokątnym układzie współrzędnych $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ przybiera postać kanoniczną $Q\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mu x'^2 + \lambda y'^2$

Czyli: krzywa 2-go stopnia

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

przybiera w tym układzie współrzędnych postać

$$\mu x'^2 + \lambda y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f = 0$$

Przykład:

$$-x^2 + 4xy + 2y^2 - 7x + 2y + 5 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$3x'^2 - 2y'^2 - 7\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) + 5 = 0$$

$$\underbrace{3x'^2 - 2y'^2} + \underbrace{\frac{-7+4}{\sqrt{5}}x' + \frac{14+2}{\sqrt{5}}y'} + 5 = 0$$

Rok 2

USUWANIE SŁE ADNIUSU LINIOWYCH

14 XI 2006

"dopelnianie do kwadratu" $\alpha \neq 0$

(2)

$$3x'^2 - \frac{3}{\sqrt{5}}x' =$$

$$\alpha z^2 + \beta z = \alpha \left(z + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha}$$

$$\alpha z^2 + \beta z = \alpha \left(z^2 + 2 \cdot \frac{\beta}{2\alpha} z + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \right)$$

$$= \alpha \left(z + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha}$$

$$\Rightarrow 3 \left(x' + \frac{-\beta_1}{\sqrt{5} \cdot 6} \right)^2 - \frac{3}{20}$$

łatwe, bo forma diagonalna!

→ a co jeśli nie?

$$-2y'^2 + \frac{16}{\sqrt{5}}y' =$$

$$-2 \left(y' + \frac{-4}{\sqrt{5}} \right)^2 + 2 \cdot \frac{16}{5}$$

Najpierw równanie:

$$3 \left(x' - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right)^2 - \frac{3}{20} - 2 \left(y' - \frac{4}{\sqrt{5}} \right)^2 + 2 \cdot \frac{16}{5} + 5 = 0$$

$$3 \underbrace{\left(x' - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right)^2}_{x''} - 2 \underbrace{\left(y' - \frac{4}{\sqrt{5}} \right)^2}_{y''} + \frac{-3 + 128 + 100}{20} = 0$$

$$\frac{12}{45} x''^2 - \frac{8}{45} y''^2 = -1$$

$$\frac{225}{20} = \frac{45}{4}$$

Cycki: w nowym układzie współrzędnych (uwaga! o innym początku!)

nowe współrzędne
prze stare!

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ y'' = y' - \frac{4}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{4}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Najpierw krzywa przybliżyć postaci

$$\frac{12}{45} x''^2 - \frac{8}{45} y''^2 = -1$$

stare
pne
now!

14 x 1
- 2006

(3)

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}} x' - \frac{2}{\sqrt{5}} y' = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(x'' + \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) -$$

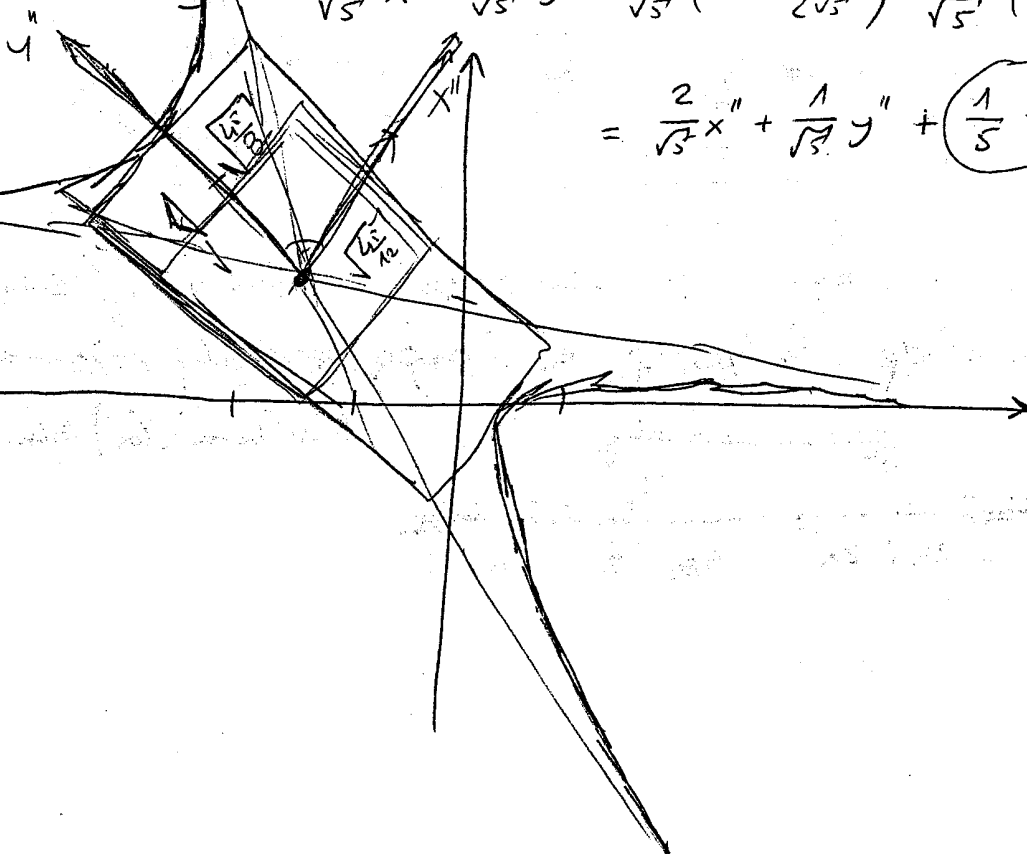
$$- \frac{2}{\sqrt{5}} \left(y'' + \frac{4}{\sqrt{5}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} x'' - \frac{2}{\sqrt{5}} y'' + \frac{1}{10} - \frac{8}{5}$$

$$\frac{1-16}{10} = -\frac{3}{2}$$

$$y = + \frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y' = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(x'' + \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(y'' + \frac{4}{\sqrt{5}} \right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} x'' + \frac{1}{\sqrt{5}} y'' + \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$$



Spraudiam

$$\begin{cases} -2x + 4y - 7 = 0 \\ 4x + 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 8y - 7 = 0 \\ 4x + 8y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$4x = -6$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

$$4x + 8y - 14$$

$$4x + 4y + 2 = 0$$

$$12y - 12 = 0$$

$$y = 1$$

Klasyfikacja krzywych drugiego stopnia

14 XI 2006

(4)

Trick z dopełnianiem do kwadratu

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f = 0$$

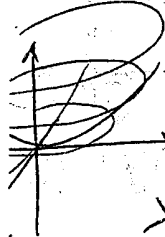
Trick z dopełnianiem do kwadratu się nie udał!

$$\lambda, \mu \neq 0$$

$$\lambda x''^2 + \mu y''^2 + f'' = 0$$

o ile jeszcze trochę uprości

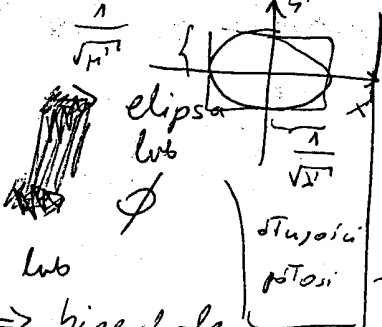
$$f'' \neq 0$$



$$\lambda', \mu' > 0$$

$$\lambda', \mu' < 0$$

$$\lambda', \mu' < 0 \Rightarrow \text{hiperbola}$$



Stworzyć pociąg

$$f'' = 0$$

$$\lambda', \mu' > 0$$

punkt

$$\lambda', \mu' < 0$$

para prostych

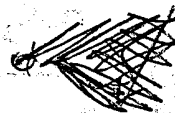
precyzyjnych

Trick się nie udał!

$$\lambda \neq 0$$

$$\mu \neq 0$$

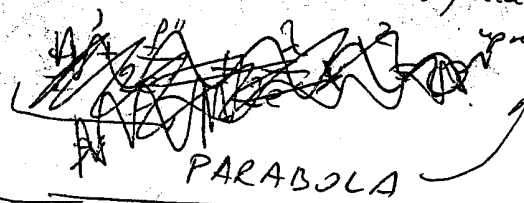
$$\lambda x'^2 + 2e'y' + f'' = 0$$



$$e' \neq 0$$

$$\lambda x'^2 + 2e'(y' + \frac{f''}{2e'}) = 0$$

(można jeszcze trochę uprościć)



$$e' = 0 \Rightarrow \lambda x^2 + f'' = 0$$

• $\emptyset$ • prosta • para prostych

$$\lambda = \mu = 0$$

(to jest krzywa pierwszego stopnia!

• nuda!)

→ prosta

→ cała płaszczyzna

→ $\emptyset$

$\frac{7}{8}$

~~5~~

Fakt. Każda krzywa 2-go stopnia w pewnym prostokątnym układzie współrzędnych (którego powstać może być inny!)

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

przybiera jedną z powyższych postaci kanonicznych.

~~Maksyma / minima funkcji dwóch zmiennych~~

~~$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f$$~~

~~Gdzie~~

* - extra,
nie będzie na
kath. lub lot.,
eqv.

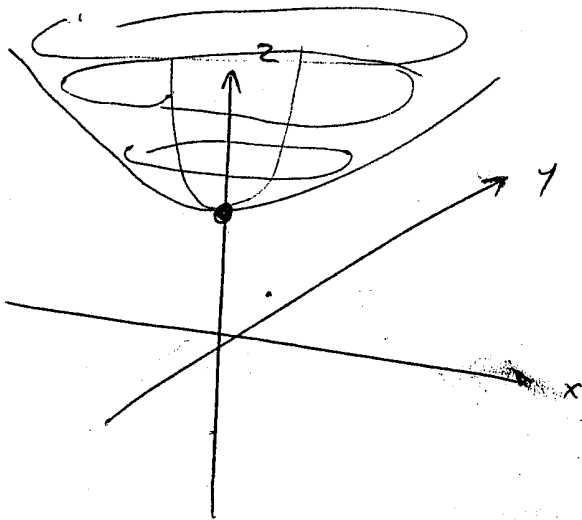
~~Jaki wygląd będzie takiej funkcji? Gdzie ma minimum / maksimum?~~

Funkcje dwóch zmiennych

14 XI 2006

42

$$f(x, y) = \lambda x^2 + \mu y^2 + f''$$



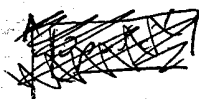
$$\lambda, \mu > 0$$

$$f'' > 0$$

Porównanie to
krzywej drugiego
stopnia

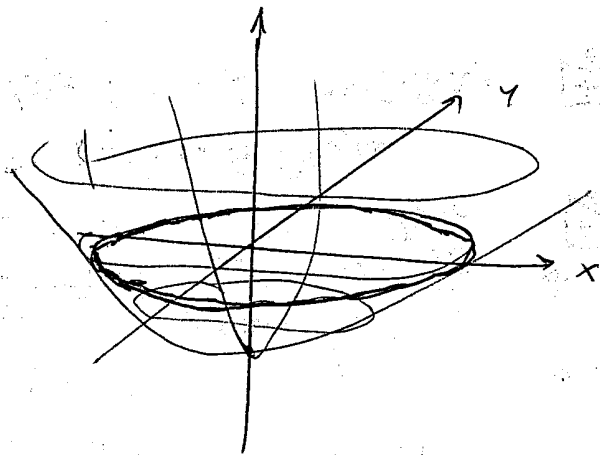
~~Kształt~~

Globalne
minimum



brak miejsc ekstremalnych

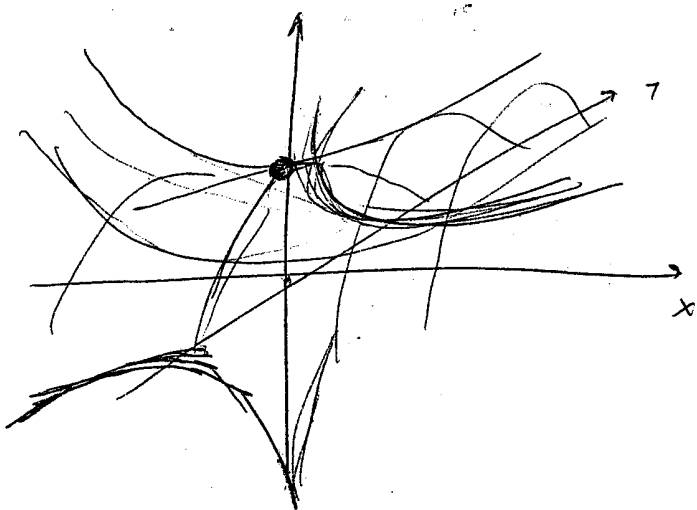
$$F(x, y) = 0$$



$$\lambda, \mu > 0$$

$$f'' < 0$$

Porównanie to
elipsy



$$\lambda > 0$$

$$\mu < 0$$

$$f'' > 0$$

brak minimum/
maksimum

Porównanie to

hiperbole / para prostych

$$ag + bh = d$$

14x1

(6)

$$bg + ch = e$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}$$

Jeśli $\det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \neq 0$, istnieje jedyné rozwiązanie.

Na przykład: Nasza ulubiona krzywa:

$$-x^2 + 4xy + 2y^2 - 7x + 2y + 5 = 0.$$

Jeśli zaś $\det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = 0$, to mamy łagod.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/6 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Zatem w układzie

$$\begin{cases} x''' = x + \frac{3}{2} \\ y''' = y - 1 \end{cases}$$

Nasze użycie przybiera postać

$$\underbrace{-x'''^2 + 4x'''y''' + 2y'''^2}_{\frac{45}{4}} + \text{magiczna stała}$$

$$\begin{aligned} x=y=0 \\ L=5. &= \frac{20}{4} \\ x''' &= \frac{3}{2}, y''' = -1. \\ L &= -\frac{9}{4} + 4 \cdot \frac{3}{2} + 2 + \text{stała} \\ &= \frac{-9-24+8}{4} + \text{stała} = \frac{-25}{4} + \text{stała} \\ \text{stała} &= \frac{45}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Zatem. } \begin{pmatrix} x'''' \\ y'''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix}$$

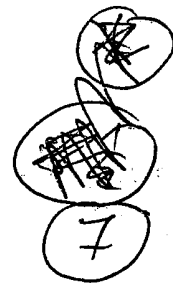
$$\boxed{\text{Sprawdź, że}} \begin{cases} x'''' = x'' \\ y'''' = y'' \end{cases}$$

$$3x'''^2 - 2y'''^2 + \frac{45}{4} = 0.$$

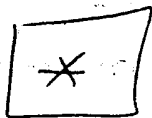
Maximum / minimum / krytycz.

14 X,

$$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f.$$



Fakt.



• Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ to punkt, w którym zerują się pochodne

czyliowe funkcji $F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$:

bo:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2ax + 2by + 2d$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2bx + 2cy + 2e$$

• jest to jedyne miejsce, w którym mogłoby być minimum / maksimum.

• $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2a$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = 2b$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2c$$

$$2 \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{bmatrix} = H(F)$$



Hesjan

$\Leftrightarrow$ maksimum ~~jest~~ jeśli obie wartości same $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \frac{1}{2} H(F)$ są

dodatnie

minimum, jeśli $\Leftrightarrow$ obie wartości same są ujemne.

Jeśli $F(x,y)$ funkcja klasy C^2

Wówczas ~~ma ona minimum / maksimum~~

~~ma jeśli ma minimum~~

$$\text{jeśli } \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \text{ w punkcie } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

W. Ładne $H(F)$ ^{w punkcie} ~~sta~~ $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ są dodatnie.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ jest lokalnym maksimum}$$

W. Tron $H(F)$ ^{sg} ~~je~~ $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ lokalne minimum}$$