

Lubry reopolone

VIII

14 X 1

1

Lubry

"Jak asymptotycznie zachowuje się

21 X 1

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

przekształcenie liniowe.

Stąd jest wektor

$F^n(u)$ dla $n \rightarrow \infty$?

28 X 1

$$u \in \mathbb{R}^2$$

Co można powiedzieć o ciągu $\|F^n(u)\|$?

zadane macierz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Przykład 1

F ma wektory własne: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (w. własne 3)

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (w. własne 2) (wystarczy sprawdzić).

Zadany wektor u zapisz jako kombinację liniową wektorów własnych. To wystarczy proste w tym wypadku.

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F^n(u) = b 3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (a-b) 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n b + 2^n (a-b) \\ 3^n b \end{pmatrix}$$

$$\|F^n(u)\| = \sqrt{3^{2n} b^2 + 2 \cdot 3^n \cdot 2^n b(a-b) + 2^{2n} (a-b)^2 + 3^{2n} b^2}$$

$$= \sqrt{2} 3^n |b| \sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{(a-b)}{b}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \left(\frac{a-b}{b}\right)^2}_{\rightarrow 0}}$$

$$\frac{\|F^n(u)\|}{\sqrt{2} 3^n |b|} \rightarrow 1 \quad \text{jeśli } b \neq 0$$

$$\|F^n(u)\| = 2^n |a| \quad \text{jeśli } b = 0$$

Zauważ się:

Jeśli F ma wartości własne λ, μ , przy czym $|\lambda| > |\mu|$

Co można powiedzieć o $\|F^n(u)\|$?

Przykład 2

WAŻNY!

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jaki jest zachowanie $\|M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\|$, $n \rightarrow \infty$?

$$\det(M - xI) = x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3$$

$$(x-2)^2 = -3$$

niby definicja:
 $i = \sqrt{-1}$

$$x-2 = \pm \sqrt{-3} = \pm \sqrt{3} \underbrace{\sqrt{-1}}_i = \pm \sqrt{3} i$$

Stukam wektory własne:

$$\boxed{2 + \sqrt{3}i}$$

$$(M - xI) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}i & 3 \\ -1 & -\sqrt{3}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}ix + 3y \\ -x - \sqrt{3}iy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = -\sqrt{3}i y, \quad \text{np.} \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{3}i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} +\sqrt{3}i \\ i \end{pmatrix}$$

$$\boxed{2 - \sqrt{3}i}$$

$$(M - xI) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\sqrt{3}i & 3 \\ -1 & +\sqrt{3}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\sqrt{3}ix + 3y \\ -x + \sqrt{3}iy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \sqrt{3}i y, \quad \text{np.} \quad \begin{pmatrix} +\sqrt{3}i \\ -1 \end{pmatrix}$$

Fatalna sprawa.

Ta matryca

NIE MA rzeczywistych wartości własnych,

Ale gdyby wolno nam było obliczać pierwiastki z liczb ujemnych, sytuacja byłaby lepsza.

Szczerze mówiąc nie ma tu magii, trzeba mieć dalsze

↓ tu skończym

28 XI 2006
14

druby uholok ③

14 x 1

③

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cancel{2\sqrt{3}} a \begin{pmatrix} +\sqrt{3} \\ i \end{pmatrix} + \cancel{2\sqrt{3}} b \begin{pmatrix} +\sqrt{3} \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}a + \sqrt{3}b = 1 \\ ai - bi = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b$$

$$\cancel{2\sqrt{3}} 1 = 2\sqrt{3}a$$

$$\cancel{2\sqrt{3}} \frac{-1}{2\sqrt{3}} =$$

$$a = b = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

zapiš
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ jako komb.
 lin. vektorů
 vřídých

$$M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \underbrace{(2+\sqrt{3}i)^n}_{\text{ide to jest?}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ i \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \underbrace{(2-\sqrt{3}i)^n}_{????} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -i \end{pmatrix}$$

Jedno z úkolů na cvičení

Fakt.

$$\begin{aligned} r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot r'(\cos \psi + i \sin \psi) &= \\ &= rr'(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi + \\ &\quad + i(\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi)) = \\ &= rr'(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)) \end{aligned}$$

Zatem

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Wzór de Moivre'a

$$(2+\sqrt{3}i) = \underbrace{\sqrt{7}}_r \left(\underbrace{\frac{2}{\sqrt{7}}}_{\cos \varphi} + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}_i \right)$$

Ponadto

$$\begin{aligned} 2-\sqrt{3}i &= \\ &= r \left(\frac{2}{\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}i \right) \\ &\quad \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \end{aligned}$$

$$(2+\sqrt{3}i)^n = \sqrt{7}^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

$$\begin{aligned} (2-\sqrt{3}i)^n &= \sqrt{7}^n \\ &\quad (\cos n\varphi - i \sin n\varphi) \end{aligned}$$

druby wykład (4)

14 XI

(4)

$$M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{7}^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ i \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{7}^n (\cos n\varphi - i \sin n\varphi) \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{7}^n \begin{pmatrix} \sqrt{3} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{pmatrix} =$$

Chodzi w tym o
wynik
nie ma
liczb zespolonych!

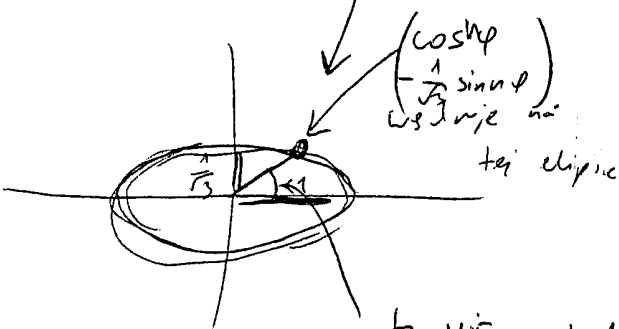
$$\|M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\| = \frac{\sqrt{7}^n}{\sqrt{3}} \sqrt{3 \cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi} =$$

$$= \sqrt{7}^n \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + 2 \cos^2 n\varphi}$$

pomiedzy $\frac{1}{\sqrt{3}}$ i 1 .

$$\sqrt{7}^n \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin n\varphi \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{M}{\sqrt{7}} \right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



to NIE jest hołtem.

Zadanie:

$$M' = \frac{1}{\sqrt{7}} M = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{3}{\sqrt{7}} \\ -\frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} \end{pmatrix}$$

Zaczynamy na $(1, 0)$ dla $n=0, 1, \dots, 10$ (komputer).

Powinny przytężyć i dać nam trochę motywacji (należy się czasem zwracać do nich "niezrozumiałości") i trochę intuicji. Szeregów nie ma, tylko zespolonych powtórzeń.

liczby urojone

14 x 1

5

Def.

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$



zbiór liczb urojonych

Mylimy: $(a, b) = a + b \cdot i$

Działania

$$+ \quad (a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

$$\cdot \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac-bd, ad+bc)$$

~~operacje~~
mówimy „partia”,
mylimy „derin”

(Fakt). $(\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{1} = (1, 0), \mathbb{0} = (0, 0))$

ma następujące własności $\forall u, w, z \in \mathbb{C}$	
$(u+w)+z = u+(w+z)$	$(uw)z = u(wz)$
$\mathbb{0}+z = z+\mathbb{0} = z$	$\mathbb{1} \cdot z = z \cdot \mathbb{1} = z$
$\exists k \in \mathbb{C} \quad z+k = k+z = \mathbb{0}$	(*) jeżeli $z \neq \mathbb{0}$ to $\exists k \in \mathbb{C}$
$z+w = w+z$	taki $zk = kz = \mathbb{1}$
	$z \cdot w = w \cdot z$

$$z(u+w) = zu + zw$$

W praktyce ten fakt znaczy tyle, że dużo
• własności liczb rzeczywistych jest również spełnionych przez liczby urojone.

Dowód Łatwy, z wykorzystaniem (*). Dla

~~4+3=7~~

$z = (a, b) \quad t = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$ jest ok, bo:

$$(a, b) \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) = (1, 0)$$

Jeżeli $tz = zt = \mathbb{1} \quad ; \quad t'z = zt' = \mathbb{1}$, to

$$t' = t' \cdot \mathbb{1} = t'(zt) = (t'z)t = \mathbb{1} \cdot t = t$$

„istnieje najwyżej jeden element odwrotny”

także t jest odwrotny do z . $z^{-1} = \frac{1}{z}$

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}$$

„ $\mathbb{C}$ spełnia aksjomaty ciała”
 więcej na II-gim semestrze

Liczyby zespolone

(6)

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$$

Pisząc $a + bi$ zamiast (a, b)

$$i = 0 + 1 \cdot i = (0, 1)$$

$$i^2 = (0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1$$

$$1 = (1, 0) = 1 + 0 \cdot i = 1$$

$$0 = (0, 0) = 0 + 0 \cdot i = 0$$

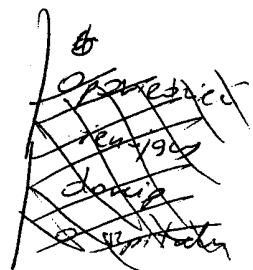
Fakt.

Odwrócenie $\mathbb{R} \ni a \mapsto (a, 0) = a + 0 \cdot i$

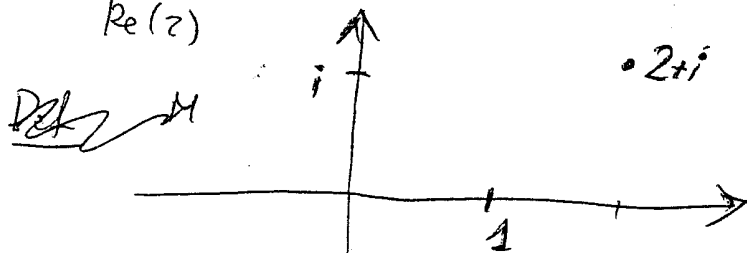
utożsamia $\mathbb{R}$ z podzbiorem $\mathbb{C}$ z zachowaniem działań.

Elementy $\mathbb{C}$ nazywamy liczbami zespolonymi

liczyby urojone to liczby postaci $a + bi$, $b \in \mathbb{R}$
 rzeczywiste $a \in \mathbb{R}$



$$z = \underbrace{a}_{\text{część rzeczywista } \text{Re}(z)} + \underbrace{bi}_{\text{część urojona } \text{Im}(z)}$$



~~Dodaj założenia o~~
~~macierzy reprezentacji $\mathbb{C}$.~~

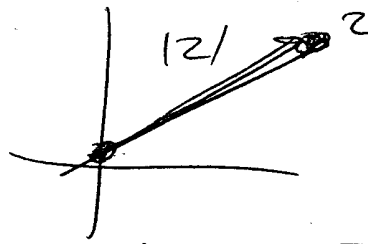
Uwaga! dla $a, b \in \mathbb{R}$
 $\text{Im } a + bi = b$
 $a \neq bi$!

Zbiór $\mathbb{C}$ często utożsamiamy z płaszczyzną (jak na rysunku).

płaszczyzna zespolona

Def. Modułem liczby zespolonej $z = a+bi$ nazywamy liczbę

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$|1+2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Fakt. $|zw| = |z| \cdot |w|$

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

Def. $\bar{z} = a-bi$

$\bar{z} = a-bi$ ← liczba sprzężona

$$\overline{1+2i} = 1-2i$$

Fakt. a) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

b) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

c) $|z|^2 = z \bar{z}$

d) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

e) $\overline{\bar{z}} = z$

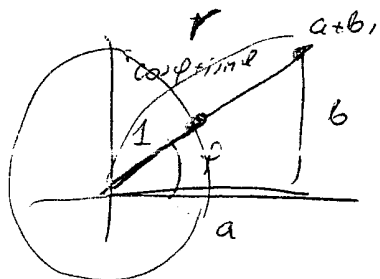
na ćwiczenia

gotta? try something.

$$z = a + bi = \underbrace{r}_{|z|} (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad r > 0$$

φ nazywamy argumentem liczby z

NIE jest jednostką obrotu!



Argumenten givungen $z \neq 0$ natywny

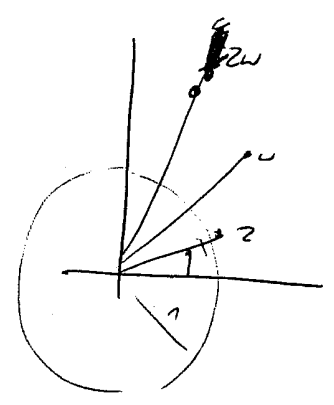
$$\varphi \in [-\pi, \pi]$$

$$\varphi = \text{Arg } z.$$

~~główny~~
~~argument~~?

Fakt ~~...~~

$$\begin{aligned} r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot u(\cos \varphi + i \sin \varphi) &= \\ &= r u (\cos(\varphi + \varphi) + i \sin(\varphi + \varphi)) \end{aligned}$$



Niektóży wolą, by argument givony naturalnie do przedziału $[0, 2\pi)$. Nie będzie się kłócić, do kolokwium i egzaminu obowiązującą pozostanie definicja (czyli $[-\pi, \pi]$)

Def. n -ty pierwiastek n -tego stopnia z liczby z jestli $w^n = z$

Fakt. Liczba $z \neq 0$ ma dokładnie n pierwiastków n -tego stopnia n .

Dowód.

$$z = w^n$$

(Postaw trygonometryczne)

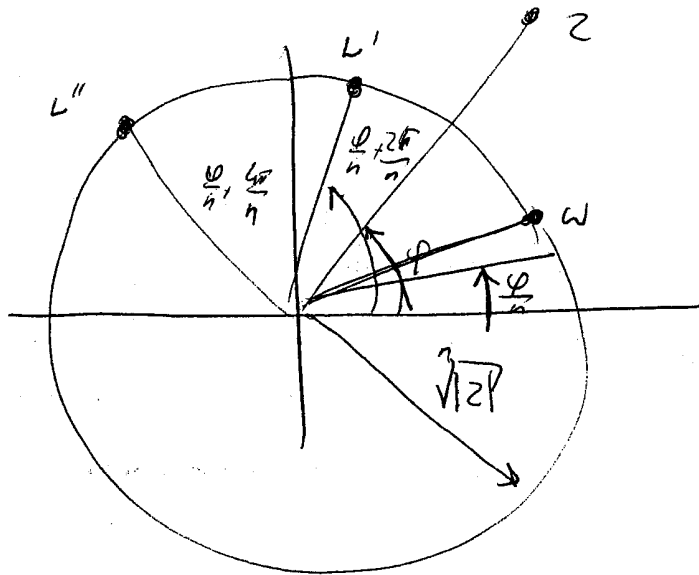
$$|z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |w|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ w &= |w|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \end{aligned}$$

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}$$

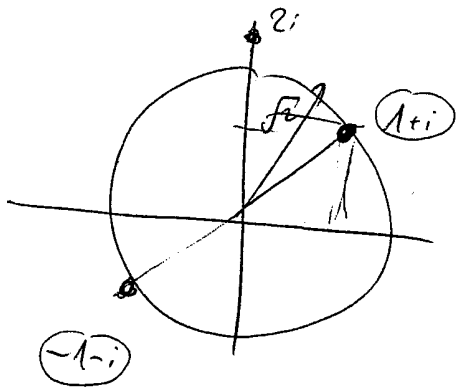
$$\varphi = n\varphi + 2k\pi$$

$$\varphi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

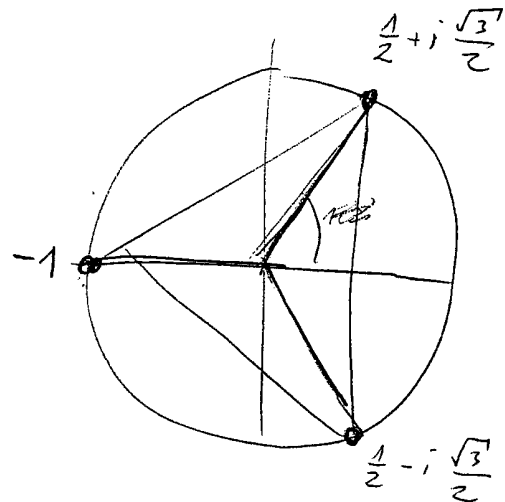


Prüfung:

$$\omega^2 = 2i$$



$$\omega^3 = -1$$



$$az^2 + bz + c = 0$$

$$b = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

rp.

$$(2 - 2 - i)(2 - 1 + i) =$$

$$= 2^2 - 3z + 3$$

21.11.2006



Korzystając z twierdzenia o resztach

możemy znaleźć pierwiastki dowolnego trójmianu:

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \text{korzystając ze standardowych wzorów.}$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

✓.

Twierdzenie (zaświadczenie dla algebraicznych wielomianów). **WAŻNE!**

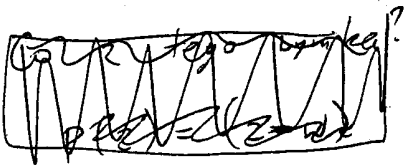
Niech $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$, gdzie $a_n \neq 0$.

będzie wielomianem stopnia $n \geq 1$ o współczynnikach

realnych. Wtedy istnieje $w \in \mathbb{C}$ takie, że $P(w) = 0$.

dowód:
konwersatorium!

"Każdy wielomian ma przynajmniej jeden pierwiastek".



stopnia $(n-1)$.

(tw. Bézout).

$$P(w) = 0 \Leftrightarrow \exists \text{ wielomian } Q \text{ takie, że}$$

$$P(z) = (z-w)Q(z).$$

SPRAWDŹ!
czy w szkole było?

Dlaczego?

$$P(z) = (z-w)Q(z) + r$$

$$P(w) = 0 \xleftarrow{\text{KATŁE}} P(z) = (z-w)Q(z)$$



$$r = 0$$



$$\Rightarrow$$



$$r = 0$$

dzielenie
wielomianów
2
części?
czy jest w szkole?

Zatem: korzystając wielokrotnie z zasadniczego twierdzenia...

$$P(z) = (z - w_1) \underbrace{Q(z)} = (z - w_1)(z - w_2) R(z) = \dots = (z - w_1) \dots (z - w_n) \cdot a_n$$

Dodać
załącznik
na
faktoryzacji
wielomianu

Wniosek 1 Każdy wielomian rozłoży się na iloczyn wielomianów rozkładu stopnia 1.

Wniosek 2 Każdy wielomian rozłoży się na dokładnie n pierwiastków (licząc z wielokrotności) licząc

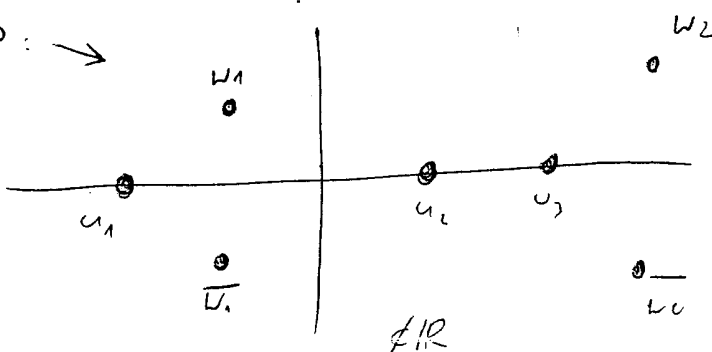
Zauważ, że $P(z)$ jest wielomianem o współczynnikach $\in \mathbb{R}$.

$$P(z) = \sum a_i z^i \quad a_i \in \mathbb{R}$$

Fakt. $P(w) = 0 \Leftrightarrow P(\bar{w}) = 0$.

$$\begin{aligned} \boxed{D} \quad \overline{P(w)} &= \overline{\sum a_i w^i} = \sum \overline{a_i w^i} = \sum \overline{a_i} (\bar{w})^i = \\ &= \sum a_i \bar{w}^i = P(\bar{w}) \quad \square \end{aligned}$$

Pierwiastki P :



$$2k + l = n$$

$u_1, \dots, u_l \in \mathbb{R}$ $w_1, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_2, \dots, w_k, \bar{w}_k \in \mathbb{C}$ $u_1, \dots, u_l \in \text{pierwiastki } P(z)$

czyż nie jest to (molekularna) ~~kompozycja~~
 tym rozumowaniem?

$$P(z) = a_n \prod_{i=1}^l (z - u_i) \prod_{j=1}^k \underbrace{(z - w_j)(z - \overline{w_j})}_{(z^2 - 2\operatorname{Re} w_j z + |w_j|^2)} =$$

Pokażemy:

Fakt

Każdy wielomian rzeczywisty zapisuje się jako iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia 1 i 2.

Tw. Niech $M \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $\chi(x) = \det(M - xI)$

28 XI

Zachodzi ~~jest~~ dokładnie jeden z poniższych warunków

1) χ ma 2 różne pierwiastki rzeczywiste $\Rightarrow$ diagonalizuje się

2) χ ma podwójny pierwiastek λ ,
wówczas

$$M = \lambda I \text{ lub}$$

$$\exists P \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \text{ takie, że } M = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$$

3) Jeżeli χ nie ma p. rzeczywistych, to ma 2 pierwiastki zespolone $\lambda, \overline{\lambda}$ (które są liczbami sprzężonymi)

Wówczas

$$\exists P \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \quad M = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix} P^{-1}$$

3') P, w założeniach 3).

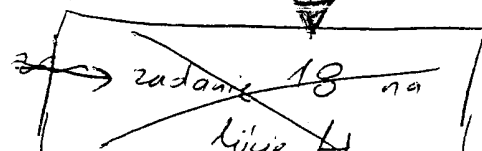
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\exists P \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$M = P \begin{pmatrix} r \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} P^{-1}$$

0, 0, 2, 1
początek
na $\mathbb{C}$.

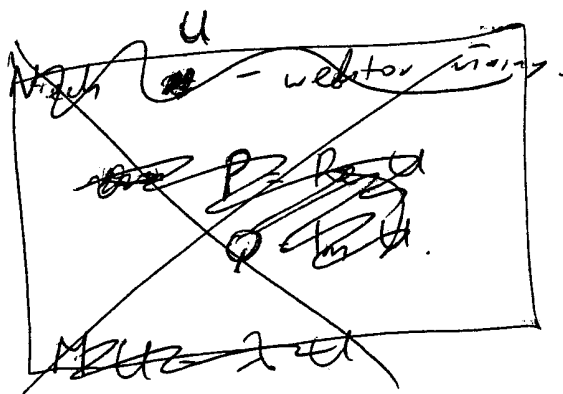
$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \lambda$$



Ad 3')

29 x 1

(13)



BRAK
ZAPAMIĘTAĆ! na to

$$U = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \leftarrow \text{wektor własny } M \text{ związany z } \lambda$$

$$M \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

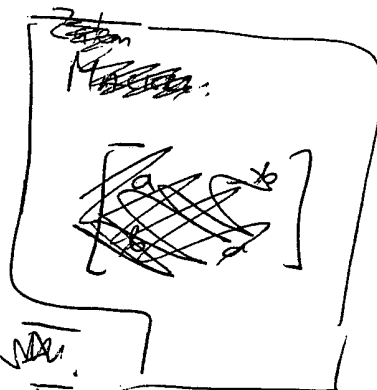
↓

Spręgam wszystkie wyrazy wszystkie.

$$\overline{M} \begin{bmatrix} \overline{u_x} \\ \overline{u_y} \end{bmatrix} = \overline{\lambda} \begin{bmatrix} \overline{u_x} \\ \overline{u_y} \end{bmatrix}$$

czyli

$$W = \overline{U} = \begin{bmatrix} \overline{u_x} \\ \overline{u_y} \end{bmatrix} \leftarrow \text{wektor własny } M \text{ związany z } \overline{\lambda}$$



$$A = \frac{U+W}{2} = \operatorname{Re} U$$

$$\lambda = a + bi$$

$$B = -\frac{U-W}{2i} = -\operatorname{Im} U = i \frac{U-W}{2}$$

$$MA = M \frac{U+W}{2} = \frac{\lambda U + \overline{\lambda} W}{2}$$

$$= \frac{(a+bi)U + (a-bi)W}{2} = a \frac{U+W}{2} + bi \frac{U-W}{2}$$

$$= aA + bB$$

$$MB = M \frac{U-W}{2i} = \frac{(a+bi)U - (a-bi)W}{2} = a \frac{U-W}{2i} + b \frac{U+W}{2}$$

$$= aB + bA$$

$13\frac{1}{2}$

Zatem

$$M = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}^{-1}$$

Tw Jordana / $\mathbb{C}$, dwumie.

Jaki $M \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ to istnieje $P \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ to

$$\bullet M = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\bullet \text{ lub } M = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$$

↑
"klatka Jordana"

Idea dowodu:

dobierz parę lnz wektorów, depends on, bynajmniej
nieistotnych.

czyli istnieje tylko jeden lnz wektor własny!

Problem? U - wektor własny, V - dowolny lnz.

$$MU = \lambda U \quad MV = cU + dV$$

$$\text{zatem } D = \begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$M = P D P^{-1}$$

$$d = \lambda.$$

$$c \neq 0!$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

wektor V zastąp przez $V' = \frac{1}{c} V$. } Spracuj!

Gdyby $d \neq \lambda$
istniałaby druga wartość
własna macierzy D czyli
druga wartość własna macierzy M .

$$MV = cU + \lambda V$$

$$M \left(\frac{1}{c} V \right) = U + \lambda \left(\frac{1}{c} V \right)$$

czyli

$$M = [U \ V'] \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} [U \ V']^{-1}$$