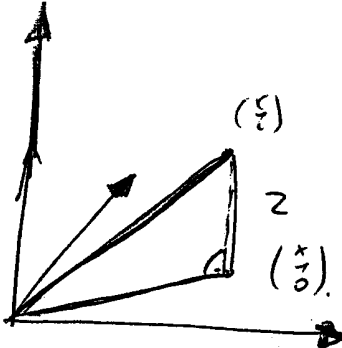


28 XI 2006



1



$\mathbb{R}^3$

Lista zadań nr 9.

• $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{z^2 + \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (tw. Pitagorasa zastosowane dla wekt.)

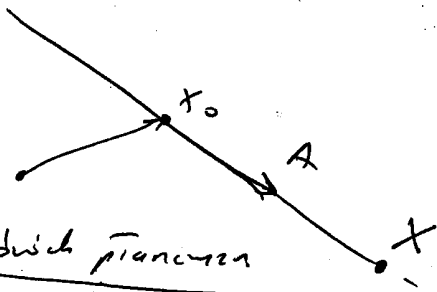
• $\cos \angle(U, V) = \frac{\langle U, V \rangle}{\|U\| \cdot \|V\|}$ } iloczyn skalarny wyraża się wzorem
 $\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = ax + by + cz$

Proste w $\mathbb{R}^3$.

• Równanie parametryczne prostej

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \quad (*)$

$X = X_0 + tA$



~~Przykład 1~~ • prosta jako przecięcie dwóch płaszczyzn

Możemy wymagać t z układu (*)

$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$
 $\frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

Równania dwóch płaszczyzn.

to działa,
 Jeżeli $a, b, c \neq 0$.
 Co zrobić w przeciwnym razie? Pomyśl.

Przykład 1. (Tatry).

$X = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 17 \\ -3 \end{pmatrix}$

wólcias...

$\frac{x-7}{2} = \frac{y+2}{17} = \frac{z-4}{-3}$

Przykład 2.

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Uwaga! w tym przykładzie $b=0$!

gdzie

$x=1+2t \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{z-1}{3} \end{cases}$
 $y=2$
 $z=1+3t$

$\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$

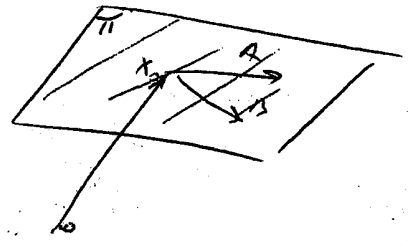
2

- Równanie parametryczne płaszczyzny π

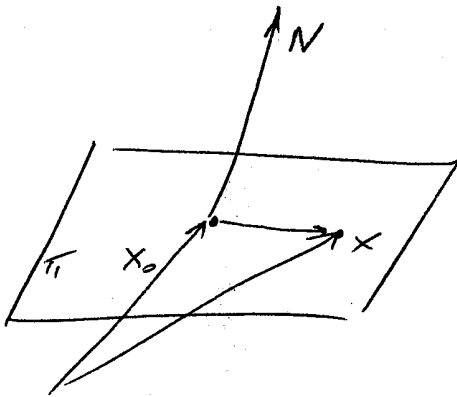
$$X = X_0 + tA + sB$$

A, B nieproporcjonalne, czyli

$$(\forall a \in \mathbb{R}) (A \neq aB \wedge B \neq aA)$$



- Równanie ogólne płaszczyzny π



wektor prostopadły do π , mamy
tę wektorem normalnym

$$N = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$X \in \pi \Leftrightarrow X - X_0 \perp N \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \langle X - X_0, N \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$ax + by + cz = \boxed{ax_0 + by_0 + cz_0}$$

$$ax + by + cz = d$$

R³

Przykład

~~Wektorem z płaszczyzny~~

22. XI

3

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_A + s \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}}_B \quad \leftarrow \text{równanie parametryczne płaszczyzny } \pi$$

$$\langle N, A \rangle = 0$$

$$\langle N, B \rangle = 0$$

$$N = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp A, B. \quad \left. \begin{array}{l} \text{sewny} \\ \text{wektor} \\ N \text{ prostopadły} \\ \text{do } \pi. \end{array} \right\}$$

Zatem

$$\begin{cases} 2a + 0b + 1c = 0 \\ 1a + 4b + 1c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -2a \\ a + 4b + 2a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -2a \\ 3a + 4b = 0 \end{cases}$$

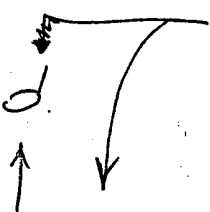
$$a = 4 \quad \swarrow \text{dowolne}$$

$$b = -3$$

$$c = -8$$

zależności wektoru normalnego N jest dużo i mamy pełną swobodę w ich wyborze (dlaczego?)

$$4x + 3y - 8z = d$$



typowa sytuacja: aby wyznaczyć wartość stałej d podstawiamy $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, wtedy należy do π !

$$4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - 8 \cdot 3 =$$

$$= 4 - 6 - 24 = -26.$$

Uwaga: niekażdemu płaszczyznę używa metody liczenia N !

$\mathbb{R}^3$

28 XI

4

Iloczyn wektorowy.

Dla $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ definiujemy

$$A \times B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

↑
iloczyn wektorowy

Jak zapisać? Cykliczna zamiana
 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$

Przykład.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 15 \\ 12 - 6 \\ 5 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Fakt 1) il. wekt. jest dwuliniowy i antysymetryczny.

$$\begin{aligned} A \times (\alpha B + \beta C) &= \\ (\alpha A + \beta B) \times C &= \\ A \times B = -B \times A & \end{aligned}$$

2) $A \times B \perp A, B.$ (~~dotyczy~~)

3) $\|A \times B\| =$ pole równoległoboku wyznaczonego przez A i B , =

~~($\|A\| \|B\| \sin(\angle(A, B))$)~~

$$= \|A\| \|B\| \sin(\angle(A, B))$$

4) zwrot jest określony regułą śrubową prawostronną.

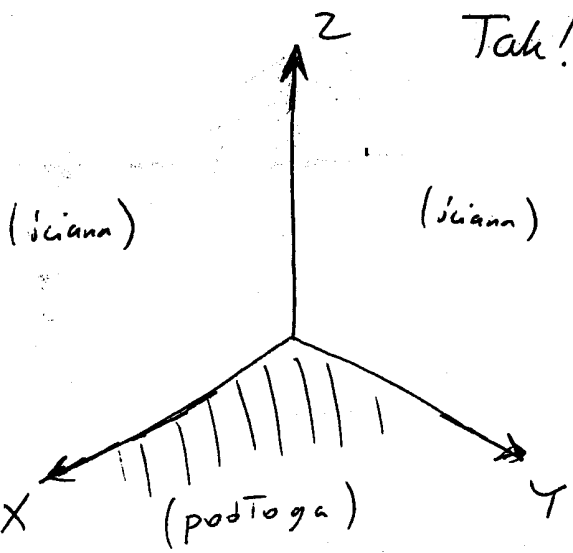
(prawy ręk).

~~dotyczy~~

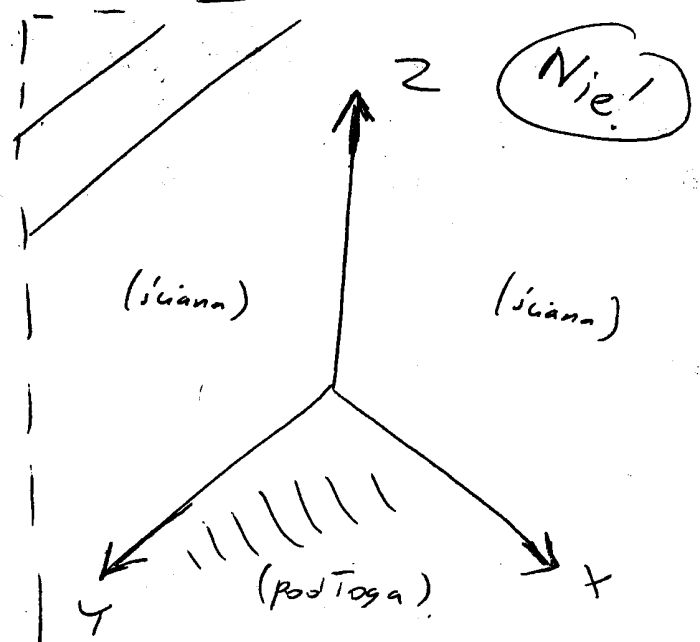
4a

Reguła prawej dłoni / jak wybrać orientację układów współrzędnych.

Gdy rysujemy układ współrzędnych w $\mathbb{R}^3$ mamy załatwić dwie możliwości:

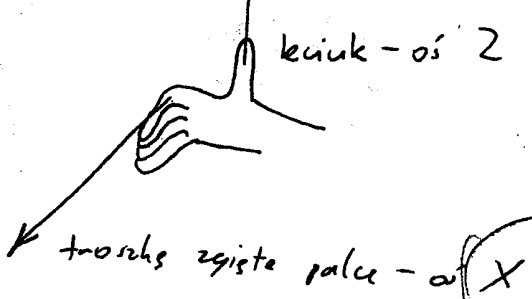


Tak!

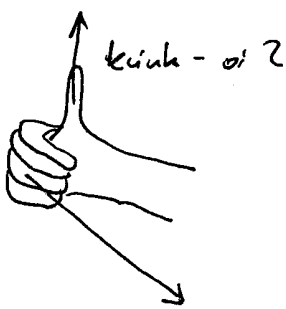


Nie!

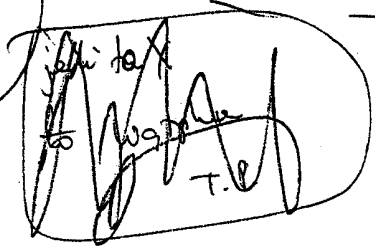
"prawoskrętny układ współrzędnych"



[tego nie lubimy, tu nie działa reguła prawej ręki]



bardziej zgięte palce = oś y.



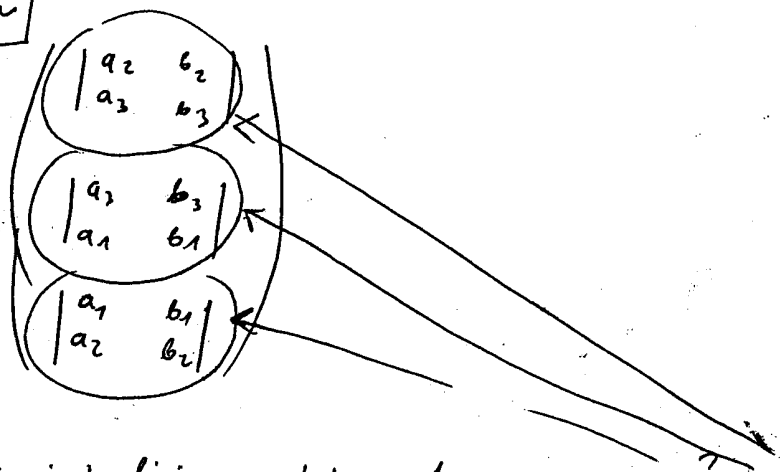
chyba X T.P.?

W prawoskrętnym układzie współrzędnych wektor $A \times B$ jest wyznaczony regułą prawej dłoni.

Dowód fałszywy

1)

$A \times B =$



dla którego x jest liniowy względem 1-go argumentu. bo to ~~trzy~~ każdy z tych trzech wyrażeniów jest liniowy względem 1-go argumentu.

dimensja względem 2-go argumentu: analogicznie.

Dla czego antysymetryczny? bo Zamiana dwóch kolumn zmienia jego znak.

2). $\langle A \times B, A \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right\rangle =$
 $= \underbrace{a_1 a_2 b_3}_{\text{określenie}} - a_1 a_3 b_2 +$
 $+ \underline{a_2 a_3 b_1} - \underbrace{a_2 a_1 b_3}_{\text{określenie}} +$
 $+ \underline{a_3 a_1 b_2} - \underline{a_3 a_2 b_1} = 0.$

Zatem

$A \times B \perp A$

~~$A \times B \perp B$~~ ponieważ

Dla czego $A \times B \perp B$?

$A \times B = -B \times A$ Wystarczy polecić

$A \times B \perp B$

$A' = B$

to jest treść zadania 1 z listy 9 -
 można zamieścić na wykładzie, można przenieść na ćwiczenia.
 to jest treść zadania 3b) z listy 9 -
 można na wykładzie, można na ćwiczeniach.

Czyli wystarczy pokazać

(6)

$$A' \times B' \perp A' \leftarrow a \text{ to jmi pokazywamy!}$$

3) $\rightarrow$ zadanie 2 z listy 9.

Alternatywny dowód:

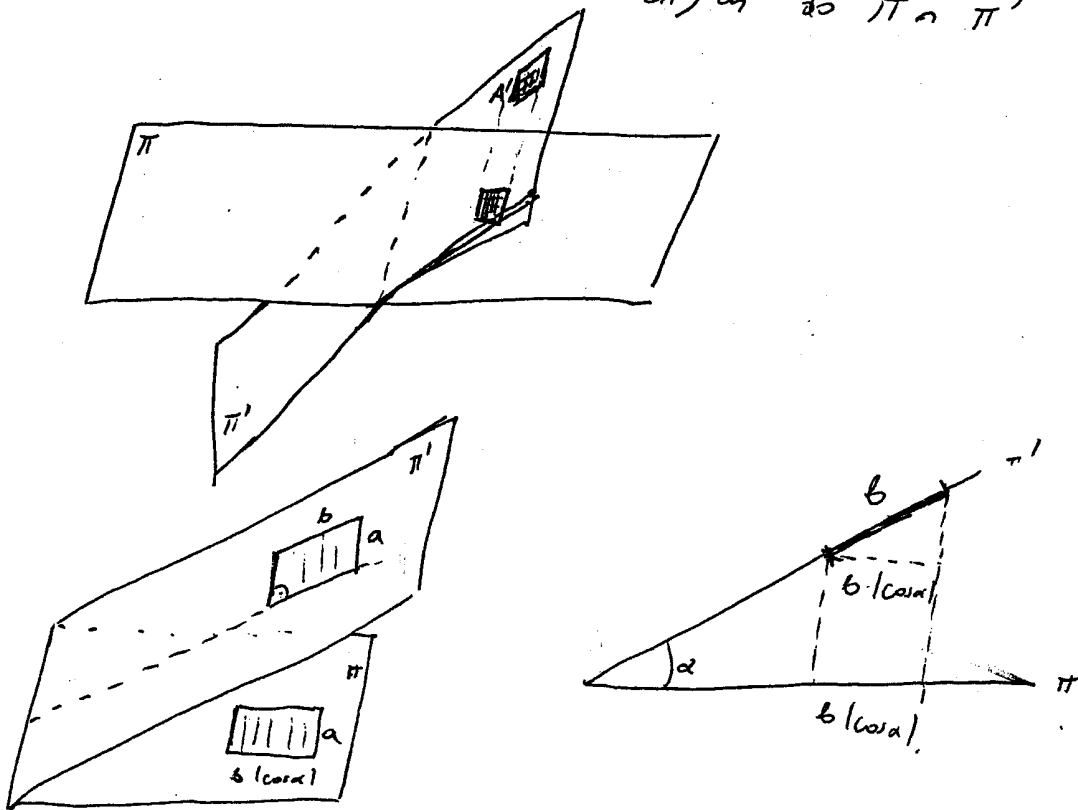
Lemma. Niech π, π' będą płaszczyznami,

$$\angle(\pi, \pi') = \alpha. \text{ Niech } A \subset \pi'.$$

Wtedy pole rzutu prostokąta A na
płaszczyznę $\pi = \text{Pole}(A) \cdot |\cos \alpha|.$

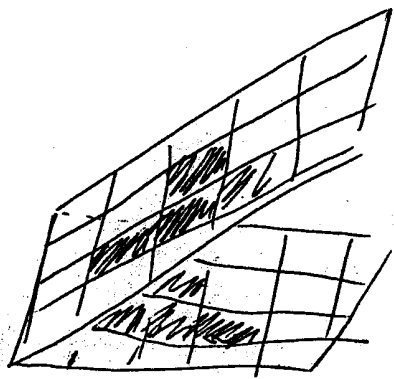
Dowód.

Najpierw sprawdzamy dla prostokątów
o dwóch bokach równoległych do π i π'



Pole prostokąta w $\pi' = a \cdot b$

Pole prostokąta w $\pi = a \cdot b \cos \alpha$.



Dowolna figura
przybliżam przy pomocy
prostokąta

□
(koniec dowodu lematu)

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \text{pole rzutu } \square(A, B) \text{ na płaszczyznę}$$

OY2 =

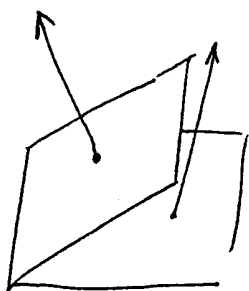
do
zapisu
wektorów
na
płaszczyźnie
OY2
wystarczy
2 współrzędne.

rzut wektora $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ na płaszczyznę
OY2

rzut wektora $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ na płaszczyznę
OY2

$$= |\cos \alpha_x| \cdot \text{Pole } \square(A, B)$$

kąt pomiędzy płaszczyzną $X = tA + sB$ a
płaszczyzną OYX.



kąt pomiędzy płaszczyznami =
= kąt pomiędzy ich wektorami normalnymi.

$$\alpha_x = \text{kąt pomiędzy } N \text{ i } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

↑
(jednostkowy)

$$N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$|\cos \alpha_x| = \frac{|\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \rangle|}{\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \| \cdot \| \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \|} = \frac{|n_1|}{1 \cdot 1} = |n_1|$$

Zatem:

$$\text{Pole } \square(A, B) \cdot |n_1| = \left| \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right| \quad (*)$$

Analogicznie:

$$\text{Pole } \square(A, B) \cdot |n_2| = \left| \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \right| \quad (**)$$

$$\text{Pole } \square(A, B) \cdot |n_3| = \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right| \quad (***)$$

Po podniesieniu stronami do kwadratu i zsumowaniu:

$$\text{Pole } \square(A, B)^2 \underbrace{(|n_1|^2 + |n_2|^2 + |n_3|^2)}_1 = \|A \times B\|^2$$

□

(koniec dowodu punktu 3)

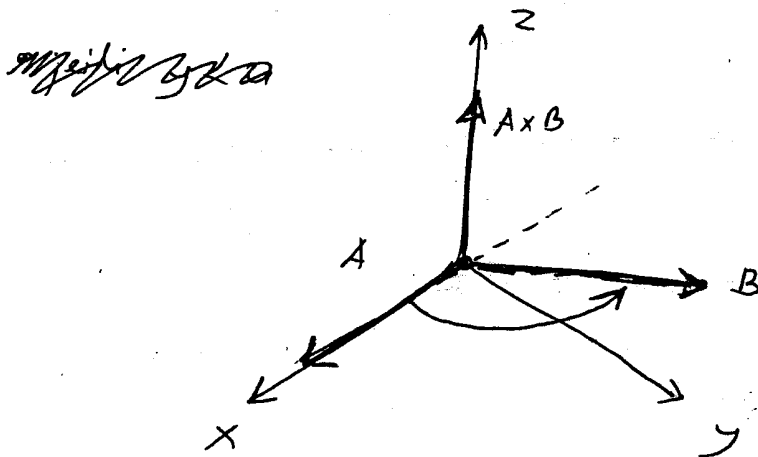
4). Dowód reguły śruby prawoskrętnej (tzw. reguła prawej dłoni) (9)

Jeżeli A jest skierowany wzdłuż osi X , a B leży na płaszczyźnie OXY ...

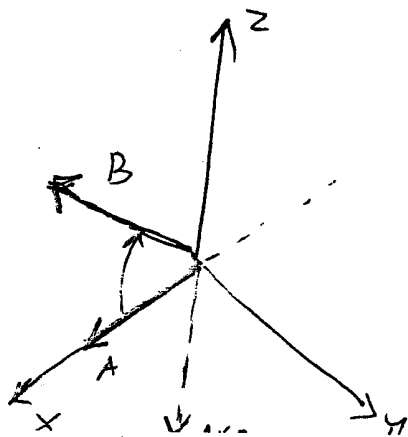
$$A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad a > 0$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} (0 \ y) \\ (0 \ 0) \\ (a \ x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ay \end{pmatrix}$$

- jeżeli $y > 0$, $ay > 0$ czyli $A \times B$ jest skierowany wzdłuż osi Z ...



- jeżeli $y < 0$, $ay < 0$ czyli $A \times B$ jest skierowany przeciwnie do osi Z ...



reguła prawej dłoni jest spełniona!

trzeba oszkazać.

W ogólnym przypadku:

przekraczamy wektory A i B ~~tek~~ stopniowo,
taki aby A był na końcu skierowany
wzdłuż osi X , a B na płaszczyźnie XY .

~~Stwierdzamy~~

W trakcie przekraczania A i B przekracza się
wzrost $A \times B$. Na końcu reguła prawej

reguły jest spełniona, więc na początku też. $\square$

Mniej oszkakany dowód, ale proszę go
sobie zostawić na później (potrzebny jest
wyznacznik)

Niech U będzie izometrią liniową $\mathbb{R}^3$
zachowującą orientację.

$$\begin{aligned} \langle U(A) \times U(B), U(C) \rangle &= \det(U(A), U(B), U(C)) = \\ &= \det(U[A \ B \ C]) = \underbrace{\det U}_{=+1} \cdot \det[A, B, C] \end{aligned}$$

$$= \langle A \times B, C \rangle = \langle U(A \times B), U(C) \rangle$$

$\uparrow$ U jest izometrią, więc zachowuje
iloscyn skalarny.

Przebieg na jedną stronę:

$$\langle U(A) \times U(B) - U(A \times B), U(C) \rangle = 0 \quad \forall C.$$

TADNE.

tego dowodu proponuję nie przedstawiać na
wykładzie, niech studenci obejrzą
go sami, gdy już będą znać
odpowiednie narzędzia.

Pr

Zatem

$$U(A) \times U(B) = U(A \times B)$$

$$U(A) \times U(B) = U(A \times B).$$

Wniosek: jeśli

$$A \times B = D$$

oraz A', B', D' są obrazami A, B, D
w izometrii liniowej zachowującej
orientację, wówczas

$$A' \times B' = D'.$$

Zatem: reguła prawej ręki jest spełniona dla
 $A, B \Leftrightarrow$ reguła prawej ręki jest
spełniona dla A', B' .

Czyli nowa sytuacja z przekształceniem bryła
legalna.

TAK NIE

Przykład ze strony ③, revisited.

⑪

⑫

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Równanie osiowe? = ?

Wektor normalny =

$$N = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Równanie osiowe:

$$\langle X, N \rangle = d.$$

$$-4x + 3y + 8z = d$$

↑
wystarczy policzyć d.

↓
ta wiedza
wystarczy do
zrobienia listy 9.

w razie potrzeby tu można przerwać;
eventualnie zrobić ćwiczenia.