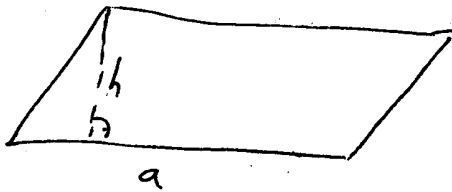


Def. Równoległokąt wypięty przez wektory A, B, C :

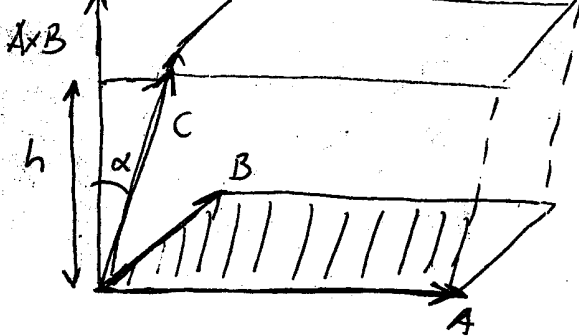
$$\square(A, B, C) = \{tA + sB + uC : t, s, u \in [0, 1]\}$$

Pole równoległoboku:



$$\text{Pole} = a \cdot h$$

Objętość równoległościanu:



$$\text{Objętość} = \text{Pole } \square(A, B) \cdot h =$$

$$h = \|C\| \cdot |\cos \alpha| =$$

$$= \cancel{\|C\|} \cdot \frac{|\langle A \times B, C \rangle|}{\|A \times B\| \cdot \cancel{\|C\|}}$$

$$\begin{aligned} \text{Objętość} &= \|A \times B\| \cdot \frac{|\langle A \times B, C \rangle|}{\|A \times B\|} = |\langle A \times B, C \rangle| = \\ &= |\det(A, B, C)| \end{aligned}$$

Definicja. Wyznacznikiem wektorów A, B, C nazywamy

$$\det(A, B, C) = \langle A \times B, C \rangle.$$

Jak liczyć wyznacznik?

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \det(A, B, C) &= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \cdot c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot c_3 = \\ &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 + \\ &\quad - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 \end{aligned}$$

Jak to zapamiętać? Wyznacznik 3×3 można obliczyć przy pomocy schematu Sarrusa

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} & & & - & - & - \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ & & & + & + & + \end{array}$$

Fakt. 1) Wyznacznik jest tryliniowy (czyli: liniowy względem każdego argumentu)

2) Wyznacznik jest antysymetryczny (zamiana dowolnych dwóch argumentów zmienia znak):

$$\begin{aligned} \det(A, B, C) &= -\det(B, A, C) = \\ &= -\det(C, B, A) = \\ &= -\det(A, C, B) = \\ &= \det(B, C, A) = \det(C, A, B) \end{aligned}$$

Dowód.

3

1) $\det(A, B, C) = \langle A \times B, C \rangle$

Ponieważ $\times$ i $\langle, \rangle$ są dwuliniowe,
więc $\det$ jest 3-liniowy.

2) a) $\det(A, B, C) = \langle A \times B, C \rangle =$
 $= \langle -B \times A, C \rangle = -\det(B, A, C).$

b) $\det(A, B, C) = \det(B, C, A)$

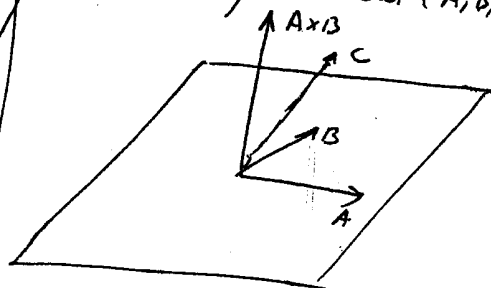
↑ albo dowodząc bezpośrednimi rachunkami
↑ albo równość co do modułu

$$|\det(A, B, C)| = |\det(B, C, A)|$$

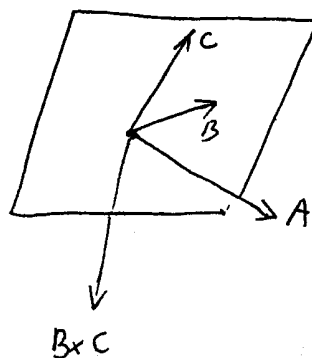
zachodzi, ponieważ lewa i prawa strona to
objętość  $(A, B, C).$

Aby upewnić się co do równości znaków...

jeżeli $\det(A, B, C) > 0$ to:



$$\langle A \times B, C \rangle > 0$$



$$\langle B \times C, A \rangle > 0.$$

Z równań a) i b) wynika już wszystko odnośnie
anty symetrii.

jeżeli lewy i prawy
dowód.

Wnioski

- 1) jeśli do pewnej liczby wyznacznika dodamy kombinację liniową powstałych liczb, wartość wyznacznika nie ulegnie zmianie.

Dowód

$$\det(A + sB + tC, B, C) \stackrel{\text{liniowość}}{=} \det(A, B, C) + s \underbrace{\det(B, B, C)}_{=0} + t \underbrace{\det(C, B, C)}_{=0}$$

dlaczego?

$$\det(B, B, C) = -\det(B, B, C) \Rightarrow \det(B, B, C) = 0.$$

anty symetria

- 2) Jeśli zamienić miejscami dwie liczby, wyznacznik zmieni znak. (Dowód: anty symetria)

3)

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & * & * \\ 0 & B & * \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \alpha \beta \gamma$$

← "mniejsza górnokątność"

Dowód: bezpośredni rachunek.

4) $\det M = \det M^T$

Dowód: ćwiczenia, lista 10.

← macierz transponowana

Wszelkie operacje, jakie robiliśmy na kolumnach
można też wykonywać na wierszach

(Dowód: transponowanie macierzy nie zmienia
wyznacznika. Operacje na wierszach
macierzy $M \longleftrightarrow$ operacje na kolumnach
macierzy M^T .)

Przykład

od 2. wiersza odejmijmy
2 razy pierwszy wiersz

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2[1]} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{-3[1]} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2[2]} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Rozwijanie wyznacznika względem wiersza / kolumny.

Przykład.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xleftarrow{\quad} =$$

w tym przykładzie

rozwijamy wyznacznik względem 1-go wiersza

liczba na przecięciu skreślonej kolumny i skreślonego wiersza

⑥

$$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

wybrany wiersz skreślam, ponadto skreślam pierwszy / drugi / trzeci kolumnę.

(numer skreślonego wiersza) + (numer skreślonej kolumny)
 (-1)

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 - 0 - 1 = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 6 - 4 = 2 \quad \checkmark$$

Dla czego wzór na wyznacznik wygląda wiersz / kolumny
 diagonal? $\rightarrow$ Lista 11.