

Przekształcenia liniowe 2.*

11 XII 2007 (1)

XI

(tylko 2 godziny)

Def

Niech $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie liniowe.

Jednym z nazywamy zbiór $\ker F = \{X \in \mathbb{R}^n: F(X) = \vec{0}\} =$
 $= \cancel{\mathbb{R}^n} F^{-1}[\{\vec{0}\}]$.

Obrazem F nazywamy zbiór $\text{Im } F = \{F(X): X \in \mathbb{R}^n\} =$
 $= F[\mathbb{R}^n]$

} $\ker$ jak kernel
 } Im jak image.

Przykład

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $F_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\ker F_A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}: A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ czyli to zbiór

rozwiązani

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 0 \cdot y + 2 \cdot z = 0 \\ 2 \cdot x + 1 \cdot y + 5 \cdot z = 0 \\ -1 \cdot x + 3 \cdot y + 1 \cdot z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x &= -2z \\ -4z + y + 5z &= 0 \text{ czyli } y = -z \\ 2z - 3z + z &= 0 \text{ czyli } 0 = 0 \end{aligned}$$

$\begin{cases} x = -2z \\ y = -z \end{cases}$

zatem $\ker F_A = \left\{ z \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}: z \in \mathbb{R} \right\}$

(prosta)

* bierze to prawie jak nazwa hollywoodzkiego sequela. Kolejne części:

"Przekształcenia liniowe strike back", "Przekształcenia liniowe - powrót po latach."

$$\text{Im } F_A = \left\{ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} : \textcircled{2}, \right. \\ \left. \left. \begin{matrix} \nearrow \\ x, y, z \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} = \right.$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\} \quad - \text{prądkowa.}$$

• identyficacja $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\ker \text{Id} = \{\vec{0}\}$$

$$\text{Im } \text{Id} = \mathbb{R}^3$$

↑ to NIE jest zbiór pusty, to
zbiór zawierający tylko $\vec{0}$.

• otrzymanie zerowej O . $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\ker O = \mathbb{R}^3$$

$$\text{Im } O = \{\vec{0}\}.$$

Twierdzenie. Niech $A \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$, $Y \in \mathbb{R}^k$ - dane
 $X \in \mathbb{R}^n$ - niewiadome.

- 1) Ustalać warunki $AX=Y$ na rozwiązanie $\Leftrightarrow Y \in \text{Im } A$
- 2) Jeśli X_0 jest rozwiązaniem układu $AX=Y$, to
 $\{X_0 + U : U \in \text{Ker } F_A\}$ jest zbiorem wszystkich rozwiązań.
↑ oznaczamy też przez $X_0 + \text{Ker } F_A$

Dowód.

- 1) oczywiste
- 2) $AX=Y \Leftrightarrow AX - AX_0 = 0 \Leftrightarrow A(X - X_0) = 0 \Leftrightarrow$
 ~~$AX - AX_0 = 0$~~ $X - X_0 \in \text{Ker } F_A$.

Przykład.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \det A = 1 \cdot (-1) = 0. \\ \text{czyli} \text{ kolumny s\kern 0.08em j\kern 0.08em s\kern 0.08em l\kern 0.08em e.} \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Im } F_A = \{AX : X \in \mathbb{R}^3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \underbrace{(x+y)}_s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{(z-x)}_t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{czyli}} = 0 \right\} \right.$$

$$x - y + z = 0.$$

Wniosek:

układ

$$\begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ -x + z = c \end{cases}$$

ma rozwiązanie $\Leftrightarrow a - b + c = 0$.

$$\text{Ker } F_A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \vec{0} \right\} =$$

(5)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ -x+z=0 \end{cases} \right\} =$$

$[2] - [1]$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Szukam rozwiązania układu równań $AX=Y$ dla $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Szukam X_0 takiego, że $AX_0=Y$:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y \in \text{Im } A, \text{ bo} \\ 2-3+1=0. \end{array} \right.$$

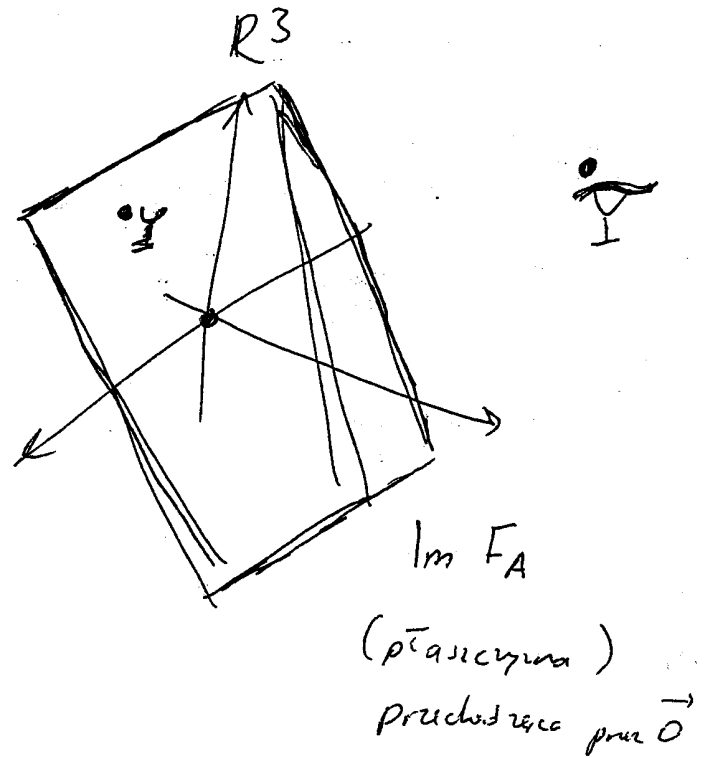
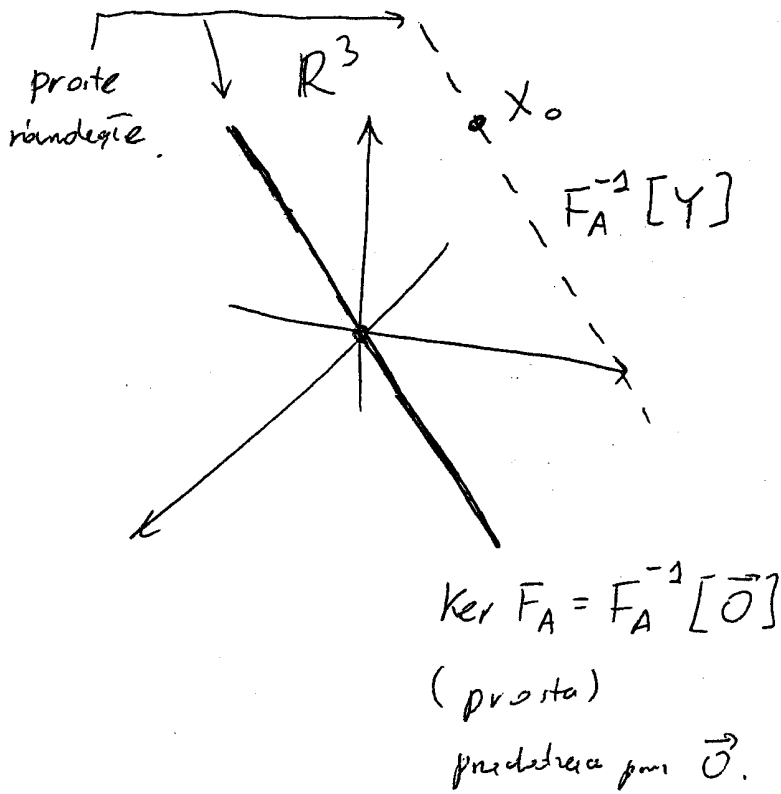
$$\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=3 \\ x+z=1 \end{cases}$$

np. $y=0$, $x=2$, $z=3$. $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Wszystkie rozwiązania:

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Rysunek, który objaśnia wszystko.



(4p)

(zagadka: jak wyglądają przekształcenia
innych punktów z $\text{Im } F_A$?)
spróbuj to narysować.

$\tilde{y} \notin \text{Im } F_A$ zatem
 $AX = \tilde{y}$ nie ma rozwiązania.

$y \in \text{Im } F_A$ zatem

$AX = y$ ma rozwiązanie.

portaci

$x_0 + \text{Ker } F_A$.

Fakt Jeżeli przekształcenie liniowe $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest bijekcją
(czyli F^{-1} istnieje, czyli F jest odwracalne) to $F^{-1}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$
też jest liniowe.

Dowód. tak samo, jak dla $\mathbb{R}^2$.

Twierdzenie Niech $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie liniowe.

NWSR.

1) F jest odwracalne

2) $\det F \neq 0$.

3) $\ker F = \{\vec{0}\}$

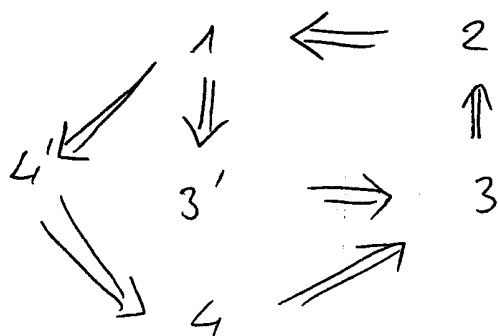
3') F jest 1-1

(czyli: różnowartościowe)

4) $\operatorname{Im} F = \mathbb{R}^3$

4') F jest na.

Dowód.



$\left. \begin{array}{l} 1) \Rightarrow 3') \\ \text{oraz} \\ 1) \Rightarrow 4') \end{array} \right\} \text{oczywiste, bo } F \text{ jest odwracalne} \Leftrightarrow F \text{ jest bijekcja.}$

$$3') \Rightarrow 3).$$

$$\downarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{bo } F(\vec{0}) = \vec{0} \end{array} \right. \quad (8)$$

Jeśli $F(x) = \vec{0}$ to $F(x) = F(\vec{0})$.

F jest różnowartościowe, zatem wynika stąd $x = \vec{0}$.

$$\text{Zatem } \ker F = \{\vec{0}\}.$$

$$3) \Rightarrow 2).$$

Zauważamy, że $\ker F = \{\vec{0}\}$. Zauważmy nie wprost, że $\det F \neq 0$, wtedy kolumny $m(F)$ są l.z., czyli $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $(x_1, x_2) \neq (0, 0, 0)$
 $F(e_1), F(e_2), F(e_3)$

$$x F(e_1) + y F(e_2) + z F(e_3) = \vec{0}.$$

$$F(xe_1 + ye_2 + ze_3) = F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right).$$

Zatem $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker F$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \vec{0}$. Sprzeczność z założeniem $\ker F = \{\vec{0}\}$.

$$2) \Rightarrow 1).$$

F jest odwracalne $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^3$ układ równań $AX = y$ ma
 jedyne rozwiązanie.

Jeśli $\det F \neq 0$, jedynych rozwiązania gwarantują
 wzory Cramera.

4') $\Rightarrow$ 4) *oczywiste.*

(9)

4) $\Rightarrow$ 3).

Założymy, że $\text{Im } F = \mathbb{R}^3$, ale $\ker F \neq \{\vec{0}\}$.

~~Wybieram~~ Wybieram $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ tak, by $F(X), F(Y), F(Z)$ l.n.z.

Wybieram $T \in \ker F$, $T \neq \vec{0}$.

Wektory X, Y, Z, T są l.n.z. ponieważ:

jeśli $aX + bY + cZ + dT = \vec{0}$ to

$$F(aX + bY + cZ + dT) = \vec{0}$$

"

$$a F(X) + b F(Y) + c F(Z) + \underbrace{d F(T)}_{= \vec{0}, \text{ bo } T \in \ker F} = \vec{0}$$

$$a F(X) + b F(Y) + c F(Z) = \vec{0},$$

$F(X), F(Y), F(Z)$ są l.n.z., zatem

$$\boxed{a = b = c = 0.1}$$

$$\boxed{aX + bY + cZ} + dT = \vec{0} \\ = \vec{0}.$$

$$dT = \vec{0}, \quad T \neq \vec{0}$$

zatem

$$\boxed{d = 0}$$

W razie problemu:

twierdzenie z wykładu

Jeśli $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{R}^3$ l.n.z.
to $\forall Y \in \mathbb{R}^3 \exists \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$

$$Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3$$

Czyli wektory w $\mathbb{R}^3$ l.n.z. to niemożliwe (byłoby takie ćwiczenie).

Sprawa: $\square$

Jak liczyć $A^{-1} = m(F^{-1})$ znając $A = m(F)$?

$$AX = Y \iff X = A^{-1}Y$$

$$F(X) = Y \iff X = F^{-1}(Y).$$

Przykład. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = ?$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 \\ -1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 0 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 \end{cases} \quad [+1]$$

w języku układów równań:
do drugiego równania dodaj
pierwsze równanie.

na marginesie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$-2[3] \begin{cases} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 \\ 0 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 \end{cases}$$

w języku macierzy:
obie strony mnoż z
lewej strony przez

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

innymi słowy do drugiego wiersza
obu macierzy dodaj pierwszy wiersz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 = 1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 - 2 \cdot y_3 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{I}^{\circ} : (-3) \\ & \text{II}^{\circ} : -2[2] \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \right.$$

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 & \text{I}^{\circ} - 2[3] \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = -\frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 & \text{II}^{\circ} \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{-1}{3}y_3 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \right.$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 &= -\frac{1}{3}y_1 - \frac{4}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 &= \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &= -\frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \right.$$

Zatem:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

opisana wyzej:
wykonywanie kilku
operacji naraz nie jest
dobrym pomyslem i
czesto prowadzi do
bledow. Zezli na
kolokwium / egzaminie
chca Panstwo dla skrotu
wykonac kilka operacji
naraz, prosze o
zamazenie kolejnosci,
w jakiej wykonywane sa
operacje. W przeciwnym
razie - bolesne obcinanie
punktow.

Jaki to ^{samo} rodzaj profesjonalista?

Precyzyjny wystawny
w każdym kroku
pamiętać dwie
małenki!

(12)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

[+1]

małenki!

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & A^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right)$$

~~Dla doświadczenia~~

Co wolno nam robić?

- dodajemy krotkę wiersza do innego wiersza
- mnożymy wiersz przez niezerowy skalar
- zmieniamy kolejność wierszy.

Dla doświadczenia: w każdym kroku mamy
parę macierzy

(B, C) o tej własności, że

$$(*) \quad B = C \cdot A.$$

Dlaczego? ~~nie~~ Na początku $(B, C) = (A, I)$ czyli (*) ok.
Operacje na wierszach = mnożenie lewostronne przez pewne macierze V

$$B' = V \cdot B$$

$$C' = V \cdot C$$

(13)

zatem

$$\underbrace{B = C \cdot A}_{(B, C) \text{ spełnia } (*)} \Rightarrow \underbrace{(V B)}_{B'} = \underbrace{(V C)}_{C'} A \quad \text{czyli}$$

(B, C) spełnia $(*)$

(B', C') spełnia $(*)$

Jeśli uda się doprowadzić do pały (I, C) ,
wówczas

$$I = C \cdot A, \quad \text{czyli}$$

standardowy argument z wyznacznikiem daje że $A \neq 0$,
czyli A^{-1} istnieje i

$$C = A^{-1}$$

Wzór na A^{-1}

14

Pamiętaj: dla $\det A \neq 0$

Wzory Cramera dla układu równań $AX=Y$

można zapisać jako:

$$x_i = \sum_j \left[\frac{1}{\det A} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} \dots & 1 & \dots \\ \dots & a_{ji} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \right] y_j$$

Wyznacznik z macierzy A
z usuniętym j -tym wierszem
i i -tą kolumną.

No tak, ale wiemy też, że

$$x_i = \sum_j (A^{-1})_{ij} y_j$$

Zatem

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A} (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} \dots & 1 & \dots \\ \dots & a_{ji} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Przykład.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = -1 + 4 = 3.$$

$$(A^{-1})_{2,3} = \frac{1}{\det A} (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}.$$

Zgadza się!