Algebra liniowa 1R, Lista 2

1. Przedstaw wektor $\binom{4}{-2}$ jako kombinację liniową wektorów $\binom{1}{1}$ i $\binom{-1}{1}$.
2. Dane są wektory $A = \binom{1}{0}$, $B = \binom{1}{1}$, $C = \binom{-1}{0}$. O ile to możliwe, przedstaw (a) A jako kombinację liniową B i C, (b) B jako kombinację liniową A i C, (c) C jako kombinację liniową B i A.
3. Dla jakich x następujące pary wektorów są liniowo zależne?
(a) $\binom{x}{1}, \binom{9}{3}$, (b) $\binom{x}{x^2}, \binom{-2}{4}$, (c) $\binom{x}{1}, \binom{4}{x}$, (d) $\binom{x}{x^2}, \binom{1}{x}$.
4. Uzasadnij, że jeśli U i V są liniowo niezależne, to rownież U i $U+V$ są liniowo niezależne.
5. Używając wzorów wyznacznikowych znajdź rozwiązanie układu równań $\begin{cases} -2x+3y=4 \\ 4x+6y=-2 \end{cases}$.

---

6. Wiadomo, że $\det\left(\binom{1}{0}, U\right) = 1$ oraz że $\|U\| = 2$. Co można powiedzieć o U?
7. Sprawdź własności wyznacznika podane na wykładzie. Sprawdź poprawność wzorów Cramera.
8. Czy para wektorów $U = \binom{-3}{2}$, $V = \binom{-4}{3}$ jest dodatnio zorientowana? Oblicz pole równoległoboku rozpiętego przez wektory U i V jak również pole trójkąta OUV.
9. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $\binom{-5}{2}$, $\binom{1}{4}$, $\binom{3}{-6}$.
10. Dla jakich a, b układ równań $\begin{cases} -2x+3y=a \\ 4x-6y=b \end{cases}$ ma rozwiązanie?
11. Dane są dwa wierzchołki równoległoboku $A = \binom{2}{5}$ i $B = \binom{5}{1}$ oraz jego pole $s = 17$. Wyznacz współrzędne dwóch pozostałych wierzchołków wiedząc, że punkt przecięcia przekątnych znajduje się na osi OY.
12. Niech $A = \binom{-2}{-3}$, $B = \binom{3}{2}$, $M = \binom{2}{0}$, $N = \binom{-4}{1}$. Rozważając znaki stosownych wyznaczników, rozstrzygnij czy punkty M i N leżą po tej samej stronie prostej AB.
13. Czy istnieją na płaszczyźnie wektory U, W, takie że $\langle U, W\rangle = 3$, $\|U\| = 4$, $\|W\| = 5$? Co gdy trójkę 3,4,5 zastąpimy przez 3,2,1? Uogólnij.
14. Przedyskutuj istnienie i liczbę rozwiązań układu 2 równań liniowych z dwiema niewiadomymi w przypadku, gdy wyznacznik główny jest równy 0. Staraj się formułować swe tezy na możliwie wiele sposobów (w terminach: przecinania się prostych; liniowej zależności wektorów; zerowania się wyznaczników W_x, W_y, W). Podaj przykłady.
15. Udowodnij, że układ 2 równań liniowych z dwoma niewiadomymi, o zerowych prawych stronach, ma niezerowe rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy jego wyznacznik główny jest równy 0.
16. Jaką figurę geometryczną może tworzyć zbiór wszystkich kombinacji liniowych dwóch ustalonych wektorów z $\mathbf{R}^2$?

---

17. Załóżmy, że układ 2 równań liniowych o wymiernych współczynnikach i wymiernych prawych stronach ma rozwiązanie różne od $(0,0)$. Udowodnij, że ma on wówczas rozwiązanie (x,y) różne od $(0,0)$ i przy tym takie, że x i y są wymierne.
18. Niech $F : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ będzie funkcją przypisującą parom wektorów liczby rzeczywiste. Załóżmy, że F jest dwuliniowa, oraz że dla każdego wektora $U \in \mathbf{R}^2$ zachodzi $F(U,U) = 0$. Udowodnij, że F jest antysymetryczna.
19. Niech $F : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ będzie funkcją przypisującą parom wektorów liczby rzeczywiste. Załóżmy, że F jest dwuliniowa i antysymetryczna. Udowodnij, że istnieje stała $C \in \mathbf{R}$, taka że dla dowolnych $U, V \in \mathbf{R}$ zachodzi wzór $F(U,V) = C \cdot \det(U,V)$.
20. Na tablicy napisana jest trójka liczb. Ruch polega na wybraniu jednej z nich i zastąpieniu jej sumą tej liczby i różnicy dwóch pozostałych liczb pomnożonej przez dowolną liczbę wymierną. Rozstrzygnij, czy startując od trójki liczb $0, 1, \sqrt{2}$ przy pomocy takich ruchów można otrzymać trójkę (nieuporządkowaną) $0, \sqrt{2}, 2$.