

Liniowa niezależność

Definicja. Dwa wektory U, W są *współliniowe*, jeśli istnieje $t \in \mathbf{R}$, takie że $U = tW$, lub istnieje $s \in \mathbf{R}$, takie że $W = sU$.

Przykłady

1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$U \quad W$

$$U = tW \quad ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 = t \cdot (-2) \\ 2 = t \cdot (-4) \end{cases} \quad t = -\frac{1}{2}$$

U, W są współliniowe

$$W = sU$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2 = s \cdot 1 \\ -4 = s \cdot 2 \end{cases} \quad s = -2$$

2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$U \quad W$

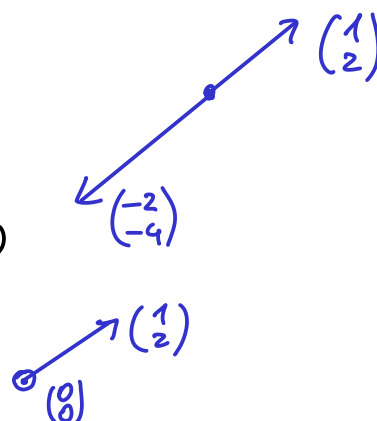
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nie (niezależnie od wartości t)

U, W są współliniowe

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

tak - dla $s = 0$



3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 = t \\ 2 = t \cdot 3 \end{cases}$$

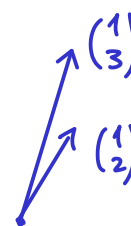
$$\begin{cases} t = 1 \\ t = 2/3 \end{cases} \quad \nexists$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 = s \\ 3 = s \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = 1 \\ s = 3/2 \end{cases} \quad \nexists$$

te wektory nie są współliniowe



Fakt. U, W są współliniowe $\iff \det(U, W) = 0$.

Dowód 1. (algebraiczny) Niech $U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

$$\det(U, W) = 0 \iff ad - bc = 0 \iff ad = bc \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

niech $t = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; wtedy

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ są współliniowe

+ przypadku $c=0, d=0 \dots$

Dowód 2. (geometryczny)

$$\det(U, W) = 0 \iff \text{Pole } \square(U, W) = 0$$

$\iff \square(U, W)$ jest odcinkiem (lub punktem)

$$\square(U, W)$$

$$\{sU + tW : s, t \in [0, 1]\}$$

$\iff U, W$ są współliniowe

$$U = tW$$

$$W = sU$$

Pd $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ - współliniowe?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{niewspółliniowe.}$$

Pd $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 72327 \\ -1 \end{pmatrix}$

Fakt. U, W są współliniowe $\iff$ istnieją $t, s \in \mathbf{R}$, co najmniej jedna niezerowa,
takie że $tU + sW = 0$.

Dowód. ($\Rightarrow$)

$$U = t W \quad \text{lub} \quad W = s U$$

$$\underset{\neq 0}{1} \cdot U + (-t) W = 0$$

$$s U + \underset{\neq 0}{(-1)} \cdot W = 0$$

($\Leftarrow$)

$$\begin{array}{ccc} & tU + sW = 0 & \\ \swarrow t \neq 0 & & \searrow s \neq 0 \\ U + \frac{s}{t} W = 0 & & \frac{t}{s} U + W = 0 \\ U = \left(-\frac{s}{t}\right) \cdot W & & W = \left(-\frac{t}{s}\right) \cdot U \end{array}$$

$$(\exists s, t \in \mathbf{R}) \left((s \neq 0 \vee t \neq 0) \wedge tU + sW = 0 \right)$$

Warunek z Faktu sformułowany po prawej stronie równoważności nazywamy *liniową zależnością* wektorów U, W . (W skrócie: wektory U, W są lz.) Współliniowość i liniowa zależność mogą być określone dla więcej niż dwóch wektorów, ale wtedy przestają być równoważne. Wyrażenie $tU + sW$ nazywamy *kombinacją liniową* wektorów U, W ; liczby s, t to współczynniki kombinacji.

Wektory są liniowo niezależne (lnz), jeśli nie są liniowo zależne:

$$\neg(\exists t, s \in \mathbf{R})(((t \neq 0) \vee (s \neq 0)) \wedge (tU + sW = 0))$$

$$(\forall t, s \in \mathbf{R})((t = s = 0) \vee (tU + sW \neq 0))$$

$$(\forall t, s \in \mathbf{R})((tU + sW = 0) \Rightarrow (t = s = 0))$$

Przykład:

liniowa niezależność $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$$t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \stackrel{?}{\Rightarrow} \quad t=s=0$$

$$\begin{pmatrix} t+s \\ 2t+3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} t+s=0 \\ 2t+3s=0 \end{cases} \quad / -2[1]$$

$$\begin{cases} t+s=0 \\ s=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=0 \\ s=0 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ są więc lnz.

Układy równań liniowych

$$(*) \quad \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \quad W = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$ – współczynniki
 x, y – niewiadome

Twierdzenie. Jeśli $ad - bc \neq 0$, to układ $(*)$ ma jedyne rozwiązanie.

(Liczbę $W = ad - bc$ nazywamy *wyznacznikiem głównym* układu $(*)$.)

Interpretacja I.

Rozwiązania $(*)$ to punkty wspólne dwóch prostych w $\mathbf{R}^2$.

D-d tw. (pierwszy) Wektory normalne tych prostych to $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Ich wyznacznik: $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$.

Wektory normalne prostych są niewspółliniowe.

Proste są nierównoległe – przecinają się więc w jednym punkcie.

Interpretacja II. rozwiązania $(*)$ to współczynniki przedstawień wektora $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ w postaci kombinacji liniowej wektorów $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

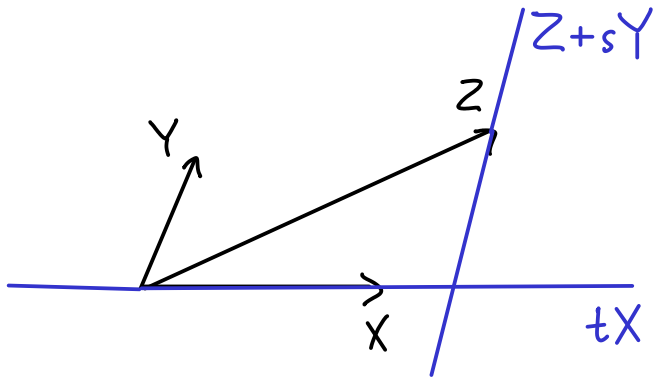
$$\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \\ \parallel \quad \parallel \quad \parallel \\ X \quad Y \quad Z \end{matrix}$$

$$xX + yY = Z$$

D-d tw. (drugi)

$$0 \neq W = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det(X, Y) \Rightarrow X, Y \text{ niewspółliniowe}$$



te dwie proste nie są równoległe
(bo ich wektory kierunkowe X, Y
są niewspółliniowe),

zatem mają wspólny punkt:

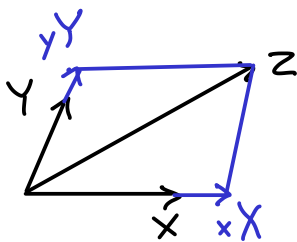
$$\exists s, t \in \mathbb{R}$$

$$tX = Z + sY$$

$$tX + (-s)Y = Z$$

$\parallel \quad \parallel$
 $X \quad Y$

Pokazaliśmy istnienie rozwiązania.



Jedynść rozwiązania?

$$\text{Niech } \underline{Z = xX + yY = x'X + y'Y} \quad \left(\begin{array}{l} \text{chcemy pokazać, że wtedy} \\ x=x', y=y' \end{array} \right)$$

$$xX + yY - x'X - y'Y = 0$$

$$(x-x')X + (y-y')Y = 0$$

$\Downarrow$

$$x-x' = y-y' = 0$$

$$x=x', y=y'$$

X, Y niewspółliniowe, więc lnz

D-d tw. (trzeci)

szukamy $x, y \in \mathbf{R}$, takich że $xX + yY = Z$.

Jeśli $xX + yY = Z$, to

$$\det(xX + yY, Y) = \det(Z, Y)$$

$$x \det(X, Y) + y \underbrace{\det(Y, Y)}_0 = \det(Z, Y)$$

$$x \det(X, Y) = \det(Z, Y) / \det(X, Y)$$

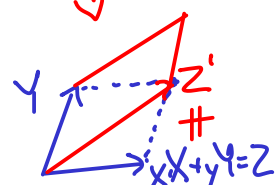
$$x = \frac{\det(Z, Y)}{\det(X, Y)}$$

$$xX + yY = Z$$

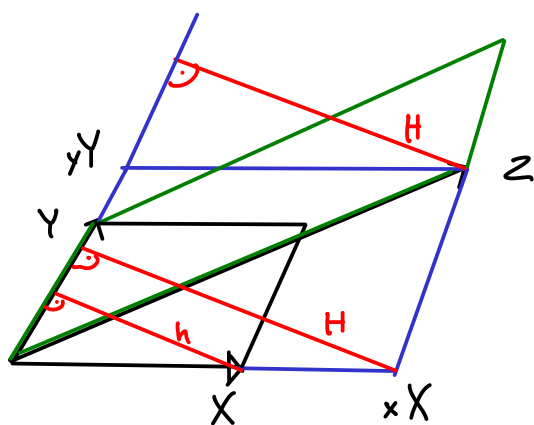
$$\det(X, xX + yY) = \det(X, Z)$$

$$y \det(X, Y) = \det(X, Z)$$

$$y = \frac{\det(X, Z)}{\det(X, Y)}$$



Pokazaliśmy jedność - otrzymana para (x, y) to jedyny kandydat na rozwiązanie. Należy jeszcze sprawdzić, że naprawdę spełnia ona równość $xX + yY = Z$.



Wzory Cramera:

$$x = \frac{\det(Z, Y)}{\det(X, Y)} = \frac{\|Y\| \cdot H}{\|X\| \cdot h} = \frac{W_y}{W_x}$$

$$\frac{\|xX\|}{\|X\|} = \frac{H}{h}$$

Przekształcenia płaszczyzny

Definicja. Przekształceniem płaszczyzny nazywamy dowolną funkcję $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, czyli funkcję, która parom liczb przypisuje pary liczb.

Przykład.

$$F: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + \sin y \\ \sqrt{1+y^2} \cdot x^7 \end{pmatrix}$$

Przykłady

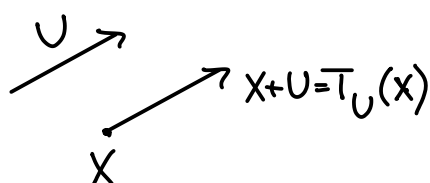
1) Przesunięcie o wektor U

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Translacja

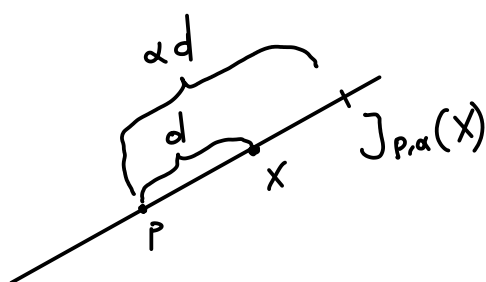
$$T_U(X) = X + U$$

$$T_U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+u_1 \\ y+u_2 \end{pmatrix}$$



2) Jednoznaczność (o środku p i skali α)

$$J_{p,\alpha} ; J_{0,\alpha} =: J_\alpha$$



$$J_{p,\alpha} = T_p \circ J_\alpha \circ T_{-p}$$

$$J_\alpha(X) = \alpha X$$

$$J_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$