

Liczby zespolone

complex $\rightarrow$

Zbiór liczb zespolonych definiujemy tak:

$$\mathbf{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$$

W tym zbiorze określamy działania dodawania i mnożenia:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$$

Fakt. (aksjomaty ciała)

Zbiór $\mathbf{C}$ z powyższymi działaniami i wyróżnionymi elementami $\mathbf{0} = (0, 0)$ i $\mathbf{1} = (1, 0)$ spełnia warunki:

- 1) $(u + w) + z = u + (w + z)$
- 2) $z + w = w + z$
- 3) $z + \mathbf{0} = z$
- 4) $(\forall z \in \mathbf{C})(\exists z' \in \mathbf{C})(z + z' = \mathbf{0})$
- 5) $(uw)z = u(wz)$
- 6) $uw = wu$
- 7) $\mathbf{1} \cdot z = z$
- 8) $(\forall z \in \mathbf{C} \setminus \{\mathbf{0}\})(\exists z' \in \mathbf{C})(zz' = \mathbf{1})$
- 9) $u(z + w) = uz + uw$
- 10) $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$

myślimy: $i^2 = -1$

$a+bi$

$$(a+bi) + (a'+b'i) = (a+a') + (b+b')i$$

$$(a+bi)(a'+b'i) = (aa' - bb') + (ab' + ba')i$$

Definicja. Dowolny zbiór z działaniami $+$, $\cdot$ i wyróżnionymi elementami $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ (zwanymi zerem i jedyneką) nazywamy *ciałem*, jeśli spełnia warunki 1-10 powyższego faktu.

Przykładami ciał są: $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{F}_p$ (reszty modulo p , p -pierwsza)

nie są ciałami: $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$
n nie jest pierwsza

Dowód faktu: bezpośredni rachunek...

Najtrudniejszy jest warunek 8). Przykład:

$$\frac{1}{3+4i} = \frac{1 \cdot (3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-4i}{3^2 - (4i)^2} = \frac{3-4i}{9+16} = \frac{3-4i}{25} = \frac{3}{25} + \left(-\frac{4}{25}\right)i$$

$$\text{Ogólniej: } \frac{1}{a+bi} = \frac{1 \cdot (a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Formalne sprawdzenie 8):} \text{ weźmy } z = (a, b) \in \mathbf{C}, z \neq \mathbf{0}. \text{ Niech} \\ z' = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right). \text{ Sprawdzamy, że } z \cdot z' = \mathbf{1}; \\ (a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \left(a \cdot \frac{a}{a^2+b^2} - b \cdot \left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right), a \cdot \left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right) + b \cdot \frac{a}{a^2+b^2}\right) = (1, 0) = \mathbf{1} \end{array} \right.$$

Fakt: $z, w \in \mathbf{C} \setminus \{\mathbf{0}\} \Rightarrow zw \neq \mathbf{0}$.

D-d: z', w' odwrotne do z, w (zgodnie z 8). Gdyby $zw = \mathbf{0}$, to

$$z' \setminus \mathbf{0} = zw \rightsquigarrow z' \cdot \mathbf{0} = z'(zw) = (z'z)w = \mathbf{1} \cdot w = w$$

Lemat: $z \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

D-d: $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$

$$z \setminus \mathbf{0} \quad z(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = z \cdot \mathbf{0}$$

$$z \setminus \mathbf{0} \quad z\mathbf{0} + z\mathbf{0} = z \cdot \mathbf{0}$$

$$+ z' \setminus \mathbf{0} \quad (z + z') \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad (4)$$

Warunki 5) i 9) są żmudne. Jest na nie sposób:

Niech $\mathbf{C}' = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$.

Odwzorowanie $\mathbf{C} \ni (a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbf{C}'$ jest bijekcją. Ta bijekcja przeprowadza działania zespolone na działania na macierzach:

Dodawanie:

$$\begin{aligned} (a, b) + (a', b') &= (a + a', b + b') \\ \Downarrow \quad \quad \quad \Downarrow & \quad \quad \quad \Downarrow \\ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a + a' & -b - b' \\ b + b' & a + a' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mnożenie:

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot (a', b') &= (aa' - bb', ab' + a'b) \\ \Downarrow \quad \quad \quad \Downarrow & \quad \quad \quad \Downarrow \\ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} aa' - bb' & -ab' - ba' \\ ba' + ab' & -bb' + aa' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zero: $\mathbf{0} = (0, 0) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$

Jedynka: $\mathbf{1} = (1, 0) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$

Wiemy, że mnożenie macierzy jest łączne; zatem i mnożenie liczb zespolonych jest łączne. Podobnie z rozdzielnością. Odwracanie:

$$\text{Jeśli } (a, b) \neq \mathbf{0}, \text{ to } \det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$$

$$\text{i wtedy } \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 + b^2} & -\frac{-b}{a^2 + b^2} \\ \frac{-b}{a^2 + b^2} & \frac{a}{a^2 + b^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}'$$

Fakt. Jeśli $zz' = zz'' = 1$, to $z' = z''$.

Dowód.

$$z' = z' \cdot 1 = z'(zz'') = (z'z)z'' = 1 \cdot z'' = z'' \quad \square$$

Jedyny element z' spełniający $zz' = 1$ nazywamy *odwrotnym* do z i oznaczamy z^{-1} , $\frac{1}{z}$ lub $1/z$.

Dzielenie określamy tak: $\frac{w}{z} = w \cdot z^{-1}$.

Odejmowanie: $(a, b) - (a', b') = (a - a', b - b')$.

Bedziemy pisać $a + bi$ zamiast (a, b) .

$$i = 0 + 1 \cdot i = (0, 1)$$

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = ((0 \cdot 0 - 1 \cdot 1), (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1$$

$$1 = (1, 0) = 1 + 0 \cdot i = 1$$

$$0 = (0, 0) = 0 + 0 \cdot i = 0$$

Odwzorowanie $\mathbf{R} \ni a \mapsto (a, 0) = a + 0 \cdot i \in \mathbf{C}$ pozwala utożsamić $\mathbf{R}$ z podzbiorem $\mathbf{C}$, z zachowaniem działań.

$$a + bi = \underline{(a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)} = (a, 0) + (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, 0 \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, 0) + (0, b) = (a, b)$$

Definicje.

Elementy $\mathbf{C}$ nazywamy *liczbami zespolonymi*.

Liczby urojone to liczby postaci bi , $b \in \mathbf{R}$.

Liczby rzeczywiste to liczby postaci a , $a \in \mathbf{R}$.

$$z = \underbrace{a}_{\text{część rzeczywista}} + \underbrace{bi}_{\text{część urojona}}$$

część rzeczywista liczby zespolonej z część urojona liczby zespolonej z

Ozn: $\operatorname{Re}(z)$ Ozn: $\operatorname{Im}(z)$

Pd: $\operatorname{Re}(2-3i)=2$, $\operatorname{Im}(2-3i)=-3$

→ Modułem liczby $z = a + bi$ nazywamy liczbę $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Zachodzą wzory:

$$|zw| = |z| \cdot |w|$$

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

macierowo: $|z| = \sqrt{\det(z)}$

$$|zw| = \sqrt{\det(zw)} =$$

$$\sqrt{\det(z) \cdot \det(w)} =$$

$$\sqrt{\det(z)} \cdot \sqrt{\det(w)} = |z| \cdot |w|$$

→ Sprzężeniem liczby zespolonej $z = a + bi$ nazywamy liczbę $\bar{z} = a - bi$.

Zachodzą wzory:

$$(z \in \mathbf{R}) \iff (z = \bar{z})$$

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

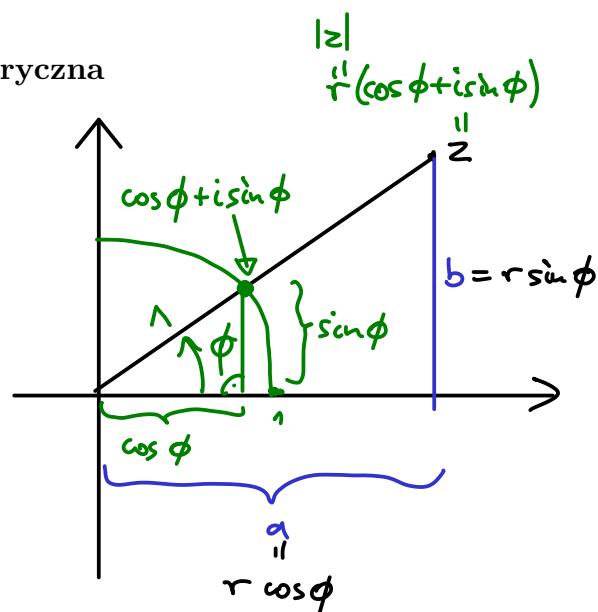
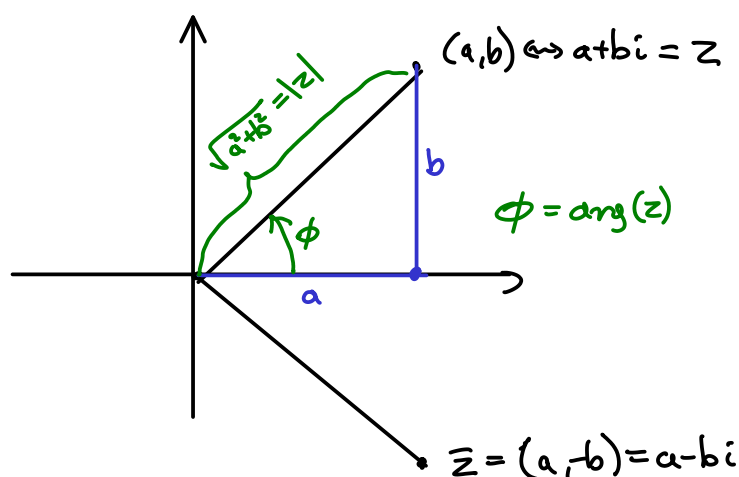
$$|z|^2 = z\bar{z}$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$\longrightarrow z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= z^T \\ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} &\overset{T}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \\ \underbrace{\quad}_z &\rightsquigarrow \underbrace{\quad}_{\bar{z}} \end{aligned}$$

Interpretacja geometryczna



Postać trygonometryczna:

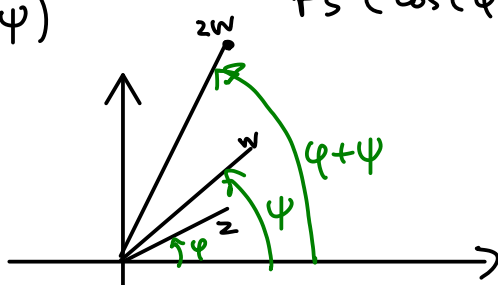
$$z = a + bi = r \cos \phi + r \sin \phi i = r(\cos \phi + i \sin \phi)$$

Liczbę ϕ pasującą do tego wzoru nazywamy *argumentem* liczby z i oznaczamy $\arg z$. Jest ona określona z dokładnością do dodania całkowitej wielokrotności liczby 2π . Argument leżący w przedziale $(-\pi, \pi]$ nazywamy *argumentem głównym* i oznaczmy $\text{Arg} z$. (Często używa się raczej przedziału $[0, 2\pi)$.)

Fakt. Przy mnożeniu liczb zespolonych ich moduły się mnożą, a ich argumenty się dodają.

Dowód:

$$\begin{aligned} r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot s(\cos \psi + i \sin \psi) &= rs \left((\underbrace{\cos \varphi \cdot \cos \psi - \sin \varphi \cdot \sin \psi}_{\cos(\varphi + \psi)} + \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{(\cos \varphi \cdot \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi)}_{\sin(\varphi + \psi)} i \right) = rs (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)) \end{aligned}$$



Wniosek. (wzór de Moivre'a)

$$(\cos \phi + i \sin \phi)^n = \cos n\phi + i \sin n\phi$$

$$\left(r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \right)^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Pierwiastkowanie

Definicja. Liczbę w nazywamy *pierwiastkiem stopnia n* z liczby z , jeśli $w^n = z$.

Fakt.

Niezerowa liczba z ma dokładnie n pierwiastków stopnia n .

Jeśli $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$, to pierwiastki te można opisać wzorem

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\phi + k \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + k \cdot 2\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

D-d: $w^n = z$. Niech $w = s(\cos \psi + i \sin \psi)$.

$$s^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = r (\cos \phi + i \sin \phi)$$

$$\begin{cases} s^n = r \\ \cos n\psi = \cos \phi \\ \sin n\psi = \sin \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} & s = \sqrt[n]{r} \quad (s \in \mathbb{R}, s \geq 0) \\ & n\psi = \phi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ & \psi = \frac{\phi + k \cdot 2\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\phi + k \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + k \cdot 2\pi}{n} \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Zauważmy, że $w_{k+n} = w_k$:

$$\underbrace{\cos}_{\sin} \frac{\phi + (k+n) \cdot 2\pi}{n} = \underbrace{\cos}_{\sin} \left(\frac{\phi + k \cdot 2\pi}{n} + 2\pi \right) = \underbrace{\cos}_{\sin} \frac{\phi + k \cdot 2\pi}{n}$$

Zatem $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ dają pełny układ pierwiastków.

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\phi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\phi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \right)$$

Pierwiastki stopnia n z liczby z o module r i argumencie ϕ leżą w wierzchołkach n -kąta foremnego wpisanego w okrąg o środku 0 i promieniu $\sqrt[n]{r}$; jeden z nich ma argument ϕ/n .

