

Przekształcenia liniowe

Definicja.

Funkcję $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ nazywamy *przekształceniem liniowym*, jeżeli

$$(\forall t, t' \in \mathbf{R})(\forall X, X' \in \mathbf{R}^n)(F(tX + t'X') = tF(X) + t'F(X'))$$

Dla $A \in M_{k \times n}(\mathbf{R})$ określamy przekształcenie liniowe $F_A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ wzorem $F_A(X) = AX$, gdzie

$$(AX)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j.$$

Twierdzenie.

Jeśli $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ jest liniowe, to istnieje jedyna macierz $A \in M_{k \times n}(\mathbf{R})$, taka że $F = F_A$. (Piszemy: $A = m(F)$.)

Dowód.

$$\mathbb{R}^n \ni X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \dots + x_n E_n$$

$$F(X) = F(x_1 E_1 + \dots + x_n E_n) = x_1 F(E_1) + \dots + x_n F(E_n) =$$

$$= x_1 A_1 + \dots + x_n A_n =$$

$$= \underbrace{(A_1, \dots, A_n)}_{\parallel A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\parallel X} = AX = F_A(X)$$

$\parallel A_1$
 $\parallel$
 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}$
 $\dots$
 $\parallel A_n$
 $\parallel$
 $\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$

□

Kolumnami $m(F)$ są wektory $F(E_1), F(E_2), \dots, F(E_n)$.

Na przekształceniach liniowych można wykonywać operacje:
dodawania:

$$\begin{aligned} F, G: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ F+G: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ (F+G)(X) &:= F(X) + G(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m(F+G) &= m(F) + m(G) \\ m(F+G)_{ij} &= m(F)_{ij} + m(G)_{ij} \end{aligned}$$

mnożenia przez skalary:

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^k, t \in \mathbb{R} \\ tF: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ (tF)(X) &:= t \cdot F(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m(tF) &= t m(F) \\ m(tF)_{ij} &= t m(F)_{ij} \end{aligned}$$

składania: *liniowe* $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, G: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^s$

złożenie: $(G \circ F)(X) := G(F(X))$ (ćw: $G \circ F$ jest liniowe)

$$\mathbb{R}^s \xleftarrow{G} \mathbb{R}^k \xleftarrow{F} \mathbb{R}^n$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{G \circ F}$

$$\begin{aligned} m(F) & (k \times n) \\ m(G) & (s \times k) \end{aligned} \rightsquigarrow m(G \circ F) (s \times n)$$

$$\begin{aligned} m(G \circ F) &= (G \circ F(E_1), \dots, G \circ F(E_n)) = (G(F(E_1)), \dots, G(F(E_n))) = \\ &= (m(G)F(E_1), \dots, m(G)F(E_n)) = (m(G) \underbrace{m(F)_1}_{\substack{\uparrow \\ \text{pierwsza kolumna } m(F)}}, \dots, m(G)m(F)_n) = \\ &=: m(G)m(F) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} m(G) \\ \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline s \\ \hline \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} m(F) \\ \begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array} \end{array} & = & \begin{array}{c} m(G)m(F) = m(G \circ F) \\ \begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline s \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$\sum_{\ell=1}^k m(G)_{i\ell} m(F)_{\ell j} = m(G \circ F)_{ij}$$

$$\sum_{\ell=1}^k A_{i\ell} B_{\ell j} = (AB)_{ij}$$

$m(G) = A, m(F) = B$

$$m(G \circ F) = m(G) m(F)$$

Przykład

$$\begin{matrix} A & B \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 15 & -4 & 10 \\ 23 & -6 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^3 \xleftarrow{F_A} \mathbb{R}^2 \xleftarrow{F_B} \mathbb{R}^3$$

$$\begin{matrix} B & A \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^2 \xleftarrow{F_B} \mathbb{R}^3 \xleftarrow{F_A} \mathbb{R}^2$$

$$\begin{matrix} C & D \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^3 \xleftarrow{F_C} \mathbb{R}^2 \xleftarrow{F_D} \mathbb{R}^2$$

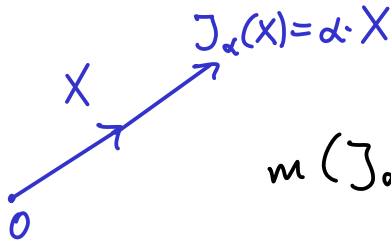
$$\begin{matrix} D & C \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix} = ?$$

$$\mathbb{R}^2 \xleftarrow{F_D} \mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}^3 \xleftarrow{F_C} \mathbb{R}^2$$

taki iloczyn nie ma sensu $\longleftrightarrow$ nie ma sensu złożenie $F_D \circ F_C$

Przykłady przekształceń liniowych $\mathbb{R}^3$

1) Jednośladość (względem 0)



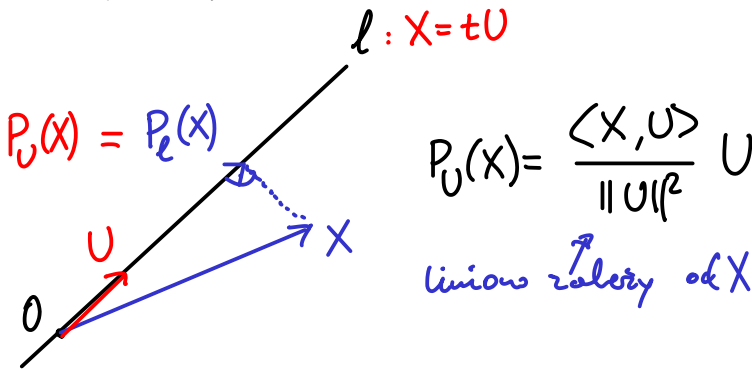
$$m(J_\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\ker J_\alpha = \{0\}$$

$$\operatorname{Im} J_\alpha = \mathbb{R}^3$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{chyba że } \alpha=0, \text{ gdy } J_\alpha = J_0 = Z \\ \text{Wtedy } \ker Z = \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{Im} Z = \{0\} \end{array} \right)$$

2) Rzut prostopadły na prostą (przechodzącą przez 0)



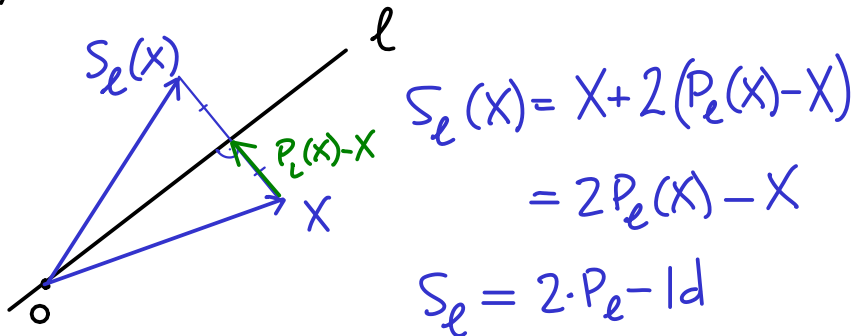
$$P_U(X) = \frac{\langle X, U \rangle}{\|U\|^2} U$$

liniowo zależy od X

$$\ker P_\ell = \ell^\perp \quad \left| \begin{array}{l} \text{płaszczyzna} \\ \text{prostopadła} \\ \text{do } \ell, \text{ przez } 0 \end{array} \right.$$

$$\operatorname{Im} P_\ell = \ell$$

3) Symetria względem prostej (przechodzącej przez 0)



$$\begin{aligned} S_\ell(X) &= X + 2(P_\ell(X) - X) \\ &= 2P_\ell(X) - X \end{aligned}$$

$$S_\ell = 2 \cdot P_\ell - \operatorname{Id}$$

$$\ker S_\ell = \{0\}$$

$$\operatorname{Im} S_\ell = \mathbb{R}^3$$

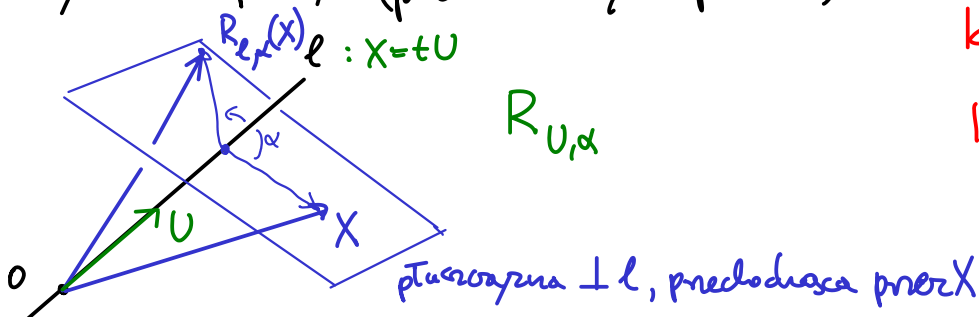
4) Identyfikator : $\operatorname{Id}(X) = X$,

$$m(\operatorname{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker \operatorname{Id} = \{0\}$$

$$\operatorname{Im} \operatorname{Id} = \mathbb{R}^3$$

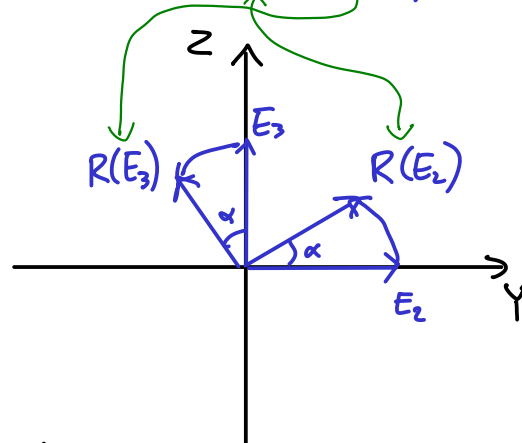
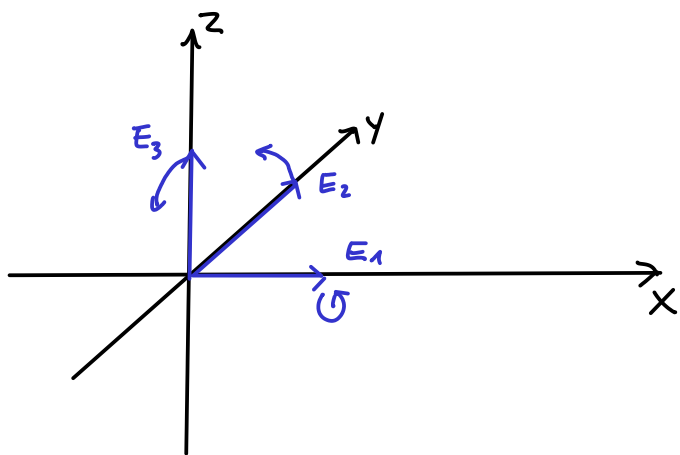
5) Obróty wokół prostych (przechodzących przez 0).



$$\ker R_{U,\alpha} = \{0\}$$

$$\operatorname{Im} R_{U,\alpha} = \mathbb{R}^3$$

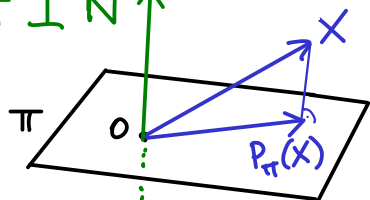
$$m(R_{E_1, \alpha}) = (R_{E_1, \alpha}(E_1), R_{E_1, \alpha}(E_2), R_{E_1, \alpha}(E_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$



6) Rzut prostopadły na płaszczyznę (przechodzącą przez 0)

ℓ - prosta $\perp \pi$

$\pi \perp N$



$$P_\ell(X) + P_\pi(X) = X$$

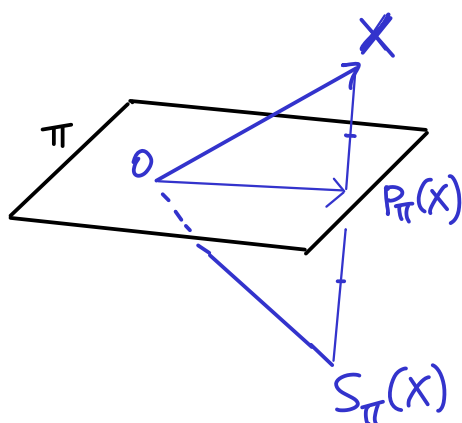
$$P_\pi = \text{Id} - P_\ell$$

↑ ↑
liniowy $\Leftarrow$ liniowy

$$\ker P_\pi = \ell = \pi^\perp$$

$$\text{Im } P_\pi = \pi$$

7) Symetria względem płaszczyzny (przechodzącej przez 0)



$$S_\pi(X) = X + 2 \cdot (P_\pi(X) - X) \\ = 2P_\pi(X) - X$$

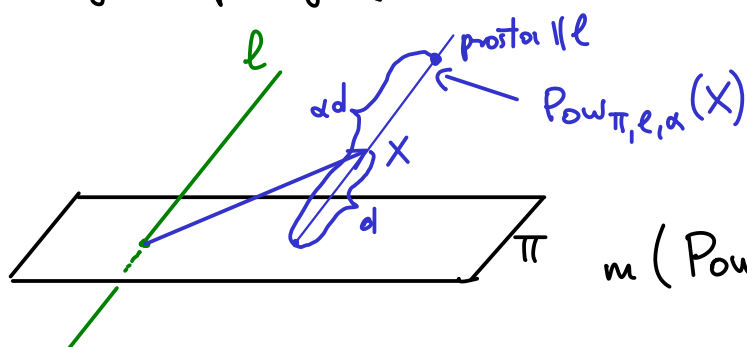
$$S_\pi = 2 \cdot P_\pi - \text{Id}$$

$$\ker S_\pi = \{0\}$$

$$\text{Im } S_\pi = \mathbb{R}^3$$

7) Powinność względem płaszczyzny π (przechodzącej przez 0) wykonywane równolegle do prostej $\ell (\neq \pi)$ o skali α . $\text{Pow}_{\pi, \ell, \alpha}$

$$\alpha \neq 0 \left| \begin{array}{l} \ker \text{Pow}_{\pi, \ell, \alpha} = \{0\} \\ \text{Im } \text{Pow}_{\pi, \ell, \alpha} = \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$$



$$m(\text{Pow}_{\text{oxy, oz}, \alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \alpha = 0: \\ \ker = \ell \\ \text{Im} = \pi \end{array} \right.$$

Jądro i obraz

Definicja.

Niech $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ będzie liniowe.

Jądrem F nazywamy zbiór

$$\ker F = \{X \in \mathbf{R}^n \mid F(X) = 0\} = F^{-1}[\{0\}].$$

Obrazem F nazywamy zbiór

$$\operatorname{Im} F = \{F(X) \mid X \in \mathbf{R}^n\} = F[\mathbf{R}^n].$$

Przykład.

$$\text{Niech } F = F_A \text{ dla } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \ker F &= \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ -2x+2z=0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{prosta}) \end{aligned}$$

$y = -x$
 $z = -y = x$

Obraz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} F &= \{F(X) \mid X \in \mathbb{R}^3\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + y \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \underbrace{(x+y)}_t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \underbrace{(y+z)}_s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\} \leftarrow \text{płaszczyzna rozpięta przez } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Równanie ogólne: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 2x - 2y + z = 0$$

Niecramerowskie układy równań

Twierdzenie.

Niech $A \in M_{k \times n}(\mathbf{R})$, $Y \in \mathbf{R}^k$ (dane), $X \in \mathbf{R}^n$ (niewiadome).

- a) Układ $AX = Y$ ma rozwiązanie $\iff Y \in \text{Im } F_A$.
 b) Jeśli X_0 jest rozwiązaniem układu $AX = Y$, to zbiorem wszystkich jego rozwiązań jest

$$X_0 + \ker F_A := \{X_0 + V \mid V \in \ker F_A\}. \quad \leftarrow \text{warstwa } \ker F_A$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \text{a) } \text{Im } F_A &= \{F_A(X) \mid X \in \mathbf{R}^n\} = \{AX \mid X \in \mathbf{R}^n\} = \{Y \in \mathbf{R}^k \mid (\exists X \in \mathbf{R}^n)(AX=Y)\} = \\ &= \{Y \in \mathbf{R}^k \mid \text{układ } AX=Y \text{ ma rozwiązanie}\} \end{aligned}$$

$$\text{b) } AX=Y \iff A((X-X_0)+X_0)=Y$$

$$A(X-X_0) + \cancel{AX_0} = Y \quad \text{ale } AX_0=Y$$

$$A(X-X_0)=0$$

$$X-X_0 \in \ker F_A$$

$$X \in X_0 + \ker F_A$$

□

Przykład.

$$AX=Y \text{ dla } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

A) Dla jakich Y układ $AX=Y$ ma rozwiązania?

$$\text{Dla } Y \in \text{Im } F_A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid 2x-2y+z=0 \right\},$$

$$\text{dla } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ takich, że } 2y_1-2y_2+y_3=0$$

$$y_3 = 2(y_2 - y_1)$$

$$\text{np. } Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad 3 \stackrel{?}{\neq} 2(2-1)=2 \quad - \text{nie ma rozwiązań.}$$

B) Jak opisać zbiór rozwiązań układu $AX = Y$ dla $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$?

$y_3 = 2 = 2 \cdot (y_2 - y_1)$ - zachodzi, więc układ ma co najmniej jedno rozwiązanie.

Zbiór rozwiązań: $X_0 + \ker F_A$, gdzie X_0 jest jakimś rozwiązaniem.

Znajdźmy jakieś X_0 :

$$\begin{cases} x+y = 2 \\ y+z = 3 \\ -2x+2z = 2 \end{cases}$$

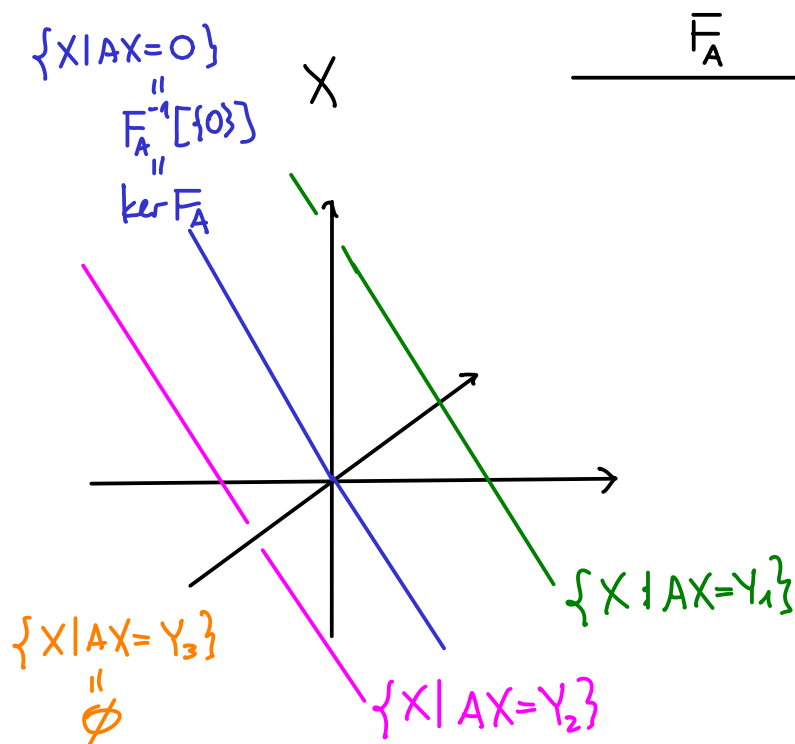
niech $y=0$; wtedy $x=2, z=3$

$$-2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = -4 + 6 = 2$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Zbiór wszystkich rozwiązań:

$$X_0 + \ker F_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}; \begin{cases} x = 2+t \\ y = -t \\ z = 3+t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$



$\xrightarrow{F_A}$

