

Jak liczyć macierz odwrotną?

II) Wzory Cramera: jeśli $AX = Y$, to

$$x_i = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} \left| \begin{array}{cc|c} & & y_j \\ \hline & \text{co} & \text{w} \\ & \text{miej} & \text{scie} \end{array} \right| y_j$$

Porównując to z wersją $x_i = \sum_{j=1}^3 (A^{-1})_{ij} y_j$ wzoru $X = A^{-1}Y$ dostajemy

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} \left| \begin{array}{cc|c} & & y_j \\ \hline & \text{co} & \text{w} \\ & \text{miej} & \text{scie} \end{array} \right|$$

lub, z użyciem iloczynu wektorowego:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A_2 \times A_3, A_3 \times A_1, A_1 \times A_2)^\top$$

III) Bardziej proceduralnie:

1) Każdy wyraz zastępujemy wartością wyznacznika powstałego przez wykreślenie z A tego wyrazu wraz z jego wierszem i kolumną.

by policzyć $\det A$ rozwijamy względem wiersza nr 1: $1 \cdot 3 - 0 \cdot 6 + (-1) \cdot 1 = 3 - 1 = 2$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



2) Transponujemy.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



3) Zmieniamy znaki "w kratkę".

$$\begin{pmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -6 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$



4) Dzielimy przez $\det A$.

$$\frac{1}{\det A}$$

$$\begin{pmatrix} 3/2 & -1 & 1/2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Diagonalizacja

Dla liniowego przekształcenia $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ / macierzy $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ określamy

- wartość własną; $\leftarrow \lambda$
- wektor własny; $\leftarrow U$
- wielomian charakterystyczny $\chi_F(x)$ / $\chi_A(x)$
analogicznie jak w $\mathbb{R}^2$.

$$F(U) = \lambda U \quad / \quad AU = \lambda U \quad , \quad U \neq 0$$

$$\chi_A(x) = \det(A - x \cdot I)$$

Fakt.

λ jest wartością własną $F \iff \lambda$ jest pierwiastkiem $\chi_F(x)$.

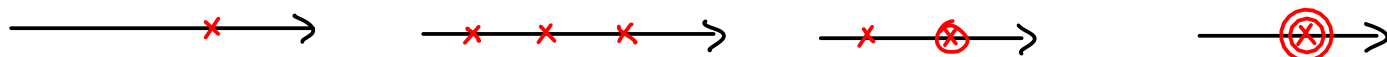
Dowód.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ jest wartością własną } F &\stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists U \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) (F(U) = \lambda U) \\ &\iff (\exists U \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) ((F - \lambda \text{Id})U = 0) \\ &\iff \ker(F - \lambda \text{Id}) \neq \{0\} \\ &\stackrel{!}{\iff} \det(F - \lambda \text{Id}) = 0 \\ &\iff \chi_F(\lambda) = 0 \quad \square \end{aligned}$$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} a-x & * & * \\ * & b-x & * \\ * & * & c-x \end{vmatrix} = -x^3 + \underbrace{(a+b+c)}_{\substack{\text{ślad } A \\ \text{tr } A}} x^2 + ? \cdot x + \det A$$

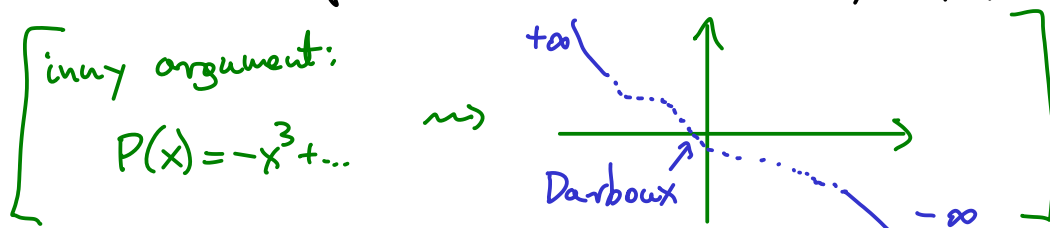
Możliwe położenia wartości własnych $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$:

×



×

A zawsze ma rzeczywistą wartość własną, bo rzeczywisty wielomian stopnia 3 zawsze ma rzeczywisty pierwiastek.



Jak szukać pierwiastków wielomianu stopnia > 2 ?

Lemat. Jeśli $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ma współczynniki całkowite oraz $P(\frac{p}{q}) = 0$, gdzie $\frac{p}{q}$ jest ułamkiem nieskracalnym, to $p|a_0$ oraz $q|a_n$.

Przykład. $P(x) = -x^3 + 8x - 2$

Wszystkie wymierne pierwiastki $P(x)$ są postaci $\frac{p}{q}$, gdzie $p|(-2)$ a $q|(-1)$

Możliwe $\frac{p}{q}$: $-2, -1, 1, 2$

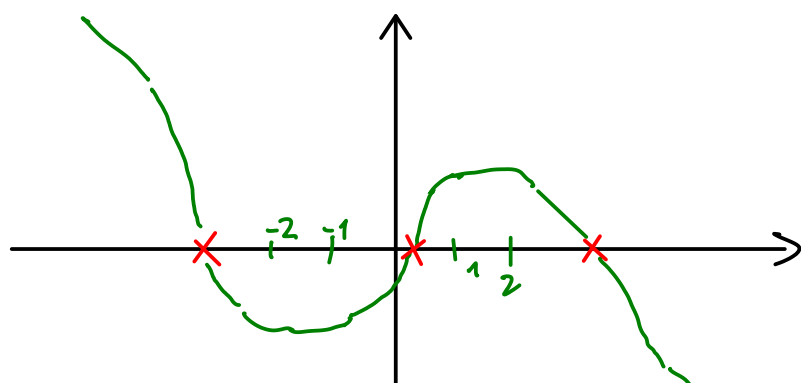
$$P(-2) = -(-2)^3 + 8 \cdot (-2) - 2 = 8 - 16 - 2 < 0$$

$$P(-1) = -(-1)^3 - 8 - 2 < 0$$

$$P(1) = -1 + 8 - 2 > 0$$

$$P(2) = -2^3 + 8 \cdot 2 - 2 = -8 + 16 - 2 > 0$$

A więc $P(x)$ nie ma wymiernych pierwiastków.



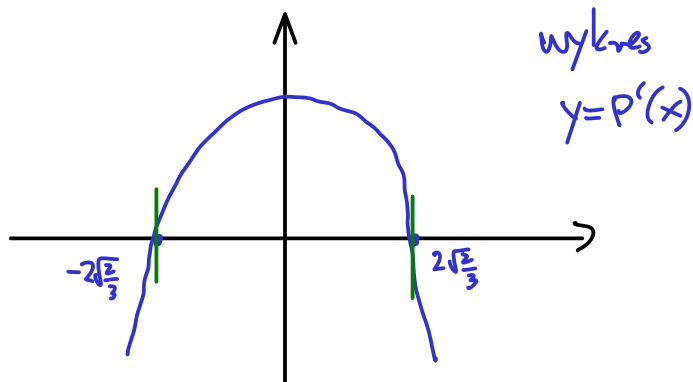
$P(x)$ ma dokładnie 3 pierwiastki rzeczywiste.

p :	q :
-2	-1
-1	-1
1	1
2	1

$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = +\infty$ } ma pierwiastek w $(-\infty, -2)$
 $P(-2) < 0$
 $P(-1) < 0$
 $P(0) < 0$ } ma pierw. w $(0, 1)$
 $P(1) > 0$
 $P(2) > 0$ } ma pierw. w $(2, \infty)$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = -\infty$

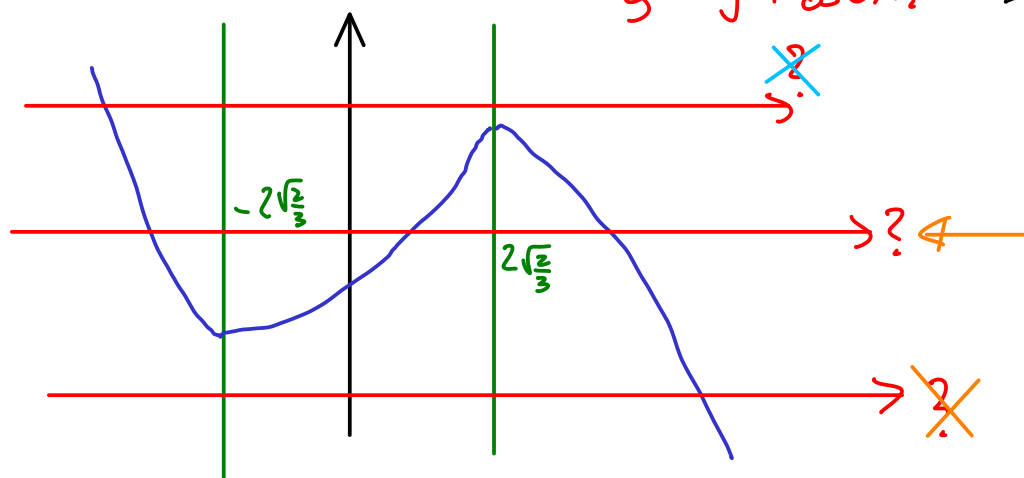
Inne podejście do pierwiastków $P(x) = -x^3 + 8x - 2$

$$P'(x) = -3x^2 + 8. \text{ Pierwiastki pochodzą: } 3x^2 = 8, x = \pm \sqrt{\frac{8}{3}} = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$



$\Rightarrow$ w $(-2\sqrt{\frac{2}{3}}, 2\sqrt{\frac{2}{3}})$
 P jest rosnąca,
poza tym przedziałem
malejąca

gdzie jest ≤ 0 ? $\rightarrow$ linijki $P(\sqrt{\frac{8}{3}})$
i $P(-\sqrt{\frac{8}{3}})$



$$P(2\sqrt{\frac{2}{3}}) > 0$$

$$P(-2\sqrt{\frac{2}{3}}) < 0$$

$$\rightarrow P(\sqrt{\frac{8}{3}}) = -\sqrt{\frac{8}{3}}^3 + 8 \cdot \sqrt{\frac{8}{3}} - 2 = -\frac{8}{3} \cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}} + 8 \cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 2 = 16 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 2 > 0$$

$$\rightarrow P(-2\sqrt{\frac{2}{3}}) = +\frac{8}{3} \cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 8 \cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 2 < 0$$

Fakt.

Jeśli X, Y, Z są trzema niezerowymi wektorami własnymi liniowego $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, odpowiadającymi, odpowiednio, trzem różnymi wartościami własnym λ, μ, η , to X, Y, Z są liniowo niezależne.

D-d: Gdyby nie, to jeden z nich (bso: X) byłby kombinacją liniową pozostałych:

$$X = tY + sZ \xrightarrow{F} \lambda X = t\lambda Y + s\lambda Z$$

$F \downarrow$

$$\lambda X = F(X) = tF(Y) + sF(Z) = t\mu Y + s\eta Z$$

odejmujemy stronami

$$0 = t(\lambda - \mu)Y + s(\lambda - \eta)Z$$

(dwa w. własne, różne, odp. różnym w. własnym są l.nz.)

$$\Downarrow Y, Z \text{ l.nz.}$$

$$\underset{\neq 0}{t}(\lambda - \mu) = \underset{\neq 0}{s}(\lambda - \eta) = 0$$

$$\Downarrow t = s = 0 \Rightarrow X = tY + sZ = 0 \cdot Y + 0 \cdot Z = 0 \quad \text{!} \quad \square$$

Twierdzenie.

Niech X, Y, Z będą liniowo niezależnymi wektorami własnymi macierzy $A \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$, odpowiadającymi wartościom własnym $\lambda, \mu, \eta \in \mathbf{R}$ (odpowiednio). Wtedy istnieje odwracalna macierz $P \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$, taka że

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$P = (X, Y, Z)$$

Dowód. Jak w $\mathbf{R}^2$.

Użyteczny fakt. (Ale jak go udowodnić?)

$$(\forall A, B \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})) (\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B))$$

Rekurencja

Zadanie.

Wyznacz wzór na n -ty wyraz ciągu zadanego rekurencyjnie:

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} + 5a_{n+1} - 6a_n, \quad a_0 = -2, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 17.$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+3} \\ a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 17 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\parallel \qquad \qquad \parallel \qquad \qquad \parallel$$

$$X_{n+1} = A \cdot X_n, \quad X_0$$

Jeśli zdiagonalizujemy A : $A = PDP^{-1}$, $X_n = A^n X_0 = (PDP^{-1})^n X_0 =$
 $= PD^n P^{-1} X_0 = P \begin{pmatrix} \lambda^n & & \\ & \mu^n & \\ & & \gamma^n \end{pmatrix} P^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} * \\ * \\ \alpha \lambda^n + \beta \mu^n + \gamma \gamma^n \end{pmatrix}$

$\Downarrow$
 a_n

λ, μ, γ - wartości własne A . Policzmy je:

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 5 & -6 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2-x & -6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (-x) \cdot \begin{vmatrix} 2-x & 5 \\ 1 & -x \end{vmatrix} =$$

$\leftarrow$
rozwijamy
względem trzeciego
wiersza

$$= - (6) + (-x)(x^2 - 2x - 5) = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$$

1 jest pierwiastkiem:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x^2 - x - 6) = (x-1)(x-3)(x+2)$$

$$\lambda=1, \mu=3, \gamma=-2 \quad ;$$

$$a_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot 3^n + \gamma \cdot (-2)^n \quad \text{dla pewnych } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

dla $n=0,1,2$;

$$\begin{cases} -2 = a_0 = \alpha + \beta + \gamma \\ -1 = a_1 = \alpha + 3\beta - 2\gamma \\ 17 = a_2 = \alpha + 9\beta + 4\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -2 \\ \alpha + 3\beta - 2\gamma = -1 \quad -[1] \\ \alpha + 9\beta + 4\gamma = 17 \quad -[1] \end{cases}$$

$\downarrow$ rozwiązujemy

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -2 \\ 2\beta - 3\gamma = 1 \\ 8\beta + 3\gamma = 19 \quad +[2] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -2 \rightsquigarrow \alpha = -5 \\ 2\beta - 3\gamma = 1 \rightsquigarrow \gamma = 1 \\ 10\beta = 20 \rightsquigarrow \beta = 2 \end{cases}$$

Odp.

$$a_n = -5 + 2 \cdot 3^n + (-2)^n$$