

## Izometrie $\mathbf{R}^3$

Izometria  $\mathbf{R}^3$  to funkcja z  $\mathbf{R}^3$  w  $\mathbf{R}^3$  zachowująca odległość.

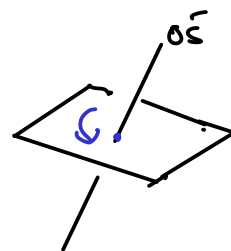
Własności izometrii  $\mathbf{R}^3$  analogiczne do własności izometrii  $\mathbf{R}^2$ :

- 1) Każda izometria  $\mathbf{R}^3$  jest złożeniem izometrii zachowującej 0 i pewnej translacji.
- 2) Funkcja  $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  zachowująca 0 jest izometrią  $\iff$  zachowuje iloczyn skalarny.
- 3) Izometria  $\mathbf{R}^3$  zachowująca 0 jest liniowa.

Przykłady: (izometrii)

a) Translacje (dla  $U \in \mathbf{R}^3$ :  $T_U: X \mapsto X+U$ )

b) Obroty (wokół prostych, czyli osi)  
(Obroty są liniowe, gdy oś przechodzi przez zero.)



c) Symetrie względem

- prostą  $\longrightarrow$  obrót względem tej prostej o  $\pi$
- punktu
- płaszczyzny

d) złożenia powyższych.

## Orientacja

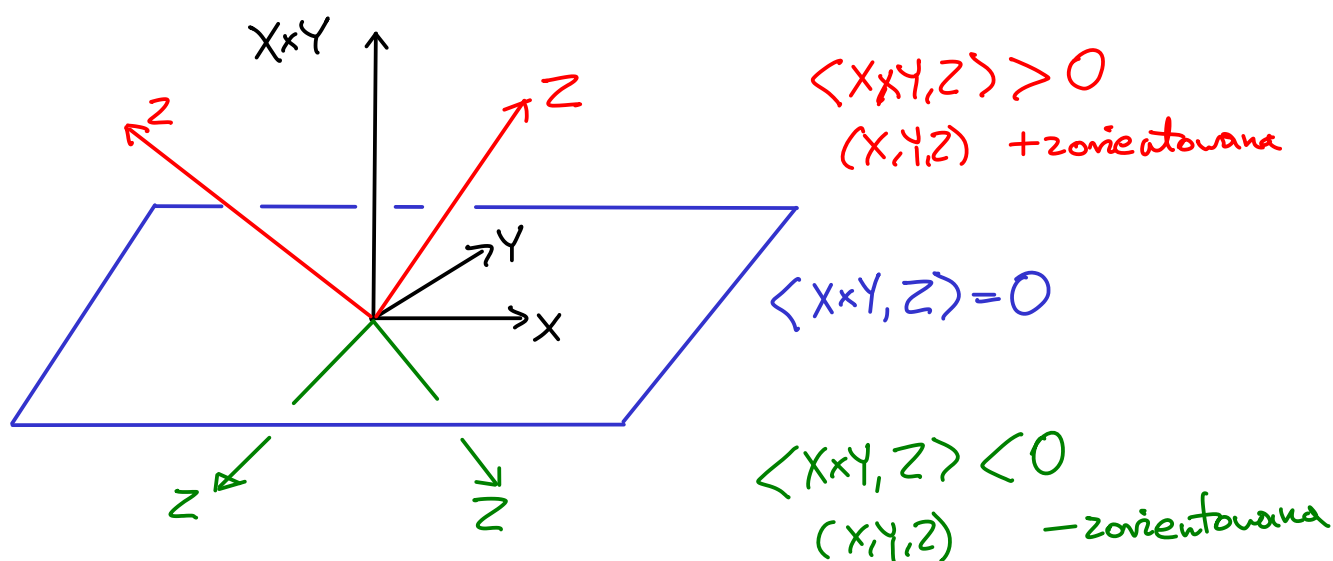
### Definicja.

Uporządkowana trójka wektorów  $(X, Y, Z)$  w  $\mathbf{R}^3$  jest

- dodatnio zorientowana – jeśli  $\det(X, Y, Z) > 0$ ;
- ujemnie zorientowana – jeśli  $\det(X, Y, Z) < 0$ ;

Przykład :  $(E_1, E_2, E_3)$  jest + zorientowana :  $\det(E_1, E_2, E_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$

$$\det(X, Y, Z) = \langle X \times Y, Z \rangle$$



### Fakt.

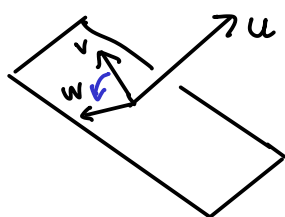
Niech  $(X, Y, Z)$  będzie ortonormalną bazą  $\mathbf{R}^3$

(tzn.  $\|X\| = \|Y\| = \|Z\| = 1$ ,  $X \perp Y \perp Z \perp X$ ).

Wówczas:  $(X, Y, Z)$  jest dodatnio zorientowana  $\iff Z = X \times Y \iff X = Y \times Z$   
 $\iff Y = Z \times X$ .

Niech  $u \in \mathbf{R}^3$ . Co to jest  $R_{u, \theta}$ ?

Obrót wokół prostej  $X = tu$  o kąt  $\theta$



- dobieramy  $v, w$  w płaszczyźnie  $u^\perp$  (prostopadłej do  $u$ )  
 tak by trójka  $(u, v, w)$  była + zorientowana.
- obracam "od  $v$  do  $w$ ".

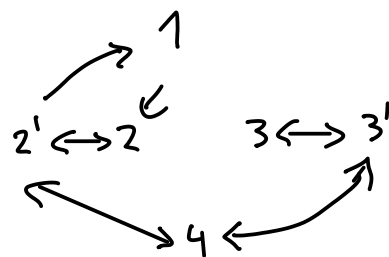
$$R_{-u, \theta} = R_{u, -\theta}$$

## Macierze liniowych izometrii $\mathbb{R}^3$

### Twierdzenie.

Niech  $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ . Następujące warunki są równoważne:

- 1)  $A$  jest macierzą izometrii. (liniowej!)
- 2) Kolumny  $A$  są długości 1, wzajemnie prostopadłe.
- 2')  $A^T A = I$ ;
- 3) Wiersze  $A$  są długości 1, wzajemnie prostopadłe.
- 3')  $AA^T = I$ .
- 4)  $A$  jest odwracalna i  $A^{-1} = A^T$ .



Dowód. Niech  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  będzie p. liniowym  
o macierzy  $A$  ( $F = F_A$ )

(1)  $\Leftrightarrow F$  jest izometria

1  $\Rightarrow$  2 kolumny  $A =$  kolumny  $m(F) = (F(E_1), F(E_2), F(E_3))$

$F$  - liniowa izometria - zachowuje  $\|\cdot\|, \langle \cdot, \cdot \rangle$ .

$$\|A_1\| = \|F(E_1)\| = \|E_1\| = 1, \quad \|A_2\| = \dots = 1, \quad \|A_3\| = \dots = 1$$

$$\langle A_1, A_2 \rangle = \langle F(E_1), F(E_2) \rangle = \langle E_1, E_2 \rangle = 0$$

analogicznie  $\langle A_2, A_3 \rangle = 0, \langle A_3, A_1 \rangle = 0$

2  $\Leftrightarrow$  2'

$$A^T A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1^T} \\ \boxed{A_2^T} \\ \boxed{A_3^T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & \boxed{A_2} & \boxed{A_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle A_1, A_1 \rangle & \langle A_1, A_2 \rangle & \vdots \\ \langle A_2, A_1 \rangle & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \langle A_3, A_3 \rangle \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

3  $\Leftrightarrow$  3'

$$A A^T = \begin{pmatrix} \boxed{w_1} \\ \boxed{w_2} \\ \boxed{w_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{w_1} & \boxed{w_2} & \boxed{w_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle & \langle w_1, w_2 \rangle & \vdots \\ \langle w_2, w_1 \rangle & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \langle w_3, w_3 \rangle \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

4  $\Rightarrow$  2', 3' (z def. macierzy odwrotnej)

2'  $\Rightarrow$  1 ( $A^T A = I \Rightarrow F$  jest izometria)

Pokażemy, że  $F$  zachowuje  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ :

$$\langle F(X), F(Y) \rangle = \langle AX, AY \rangle = (AX)^T AY = X^T A^T AY \stackrel{(2')}{=} X^T I Y = X^T Y = \langle X, Y \rangle$$

$$\underline{2' \Rightarrow 4}$$

$$A^T A = I \Rightarrow F_{A^T} \circ F_A = F_I = \text{Id}$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$   
 $1-1 \quad \Leftarrow \quad 1-1$

$F_A$  jest 1-1  $\Rightarrow F_A$  jest odwracalna  $\Rightarrow A$  jest odwracalna

$$A^T A = I \quad / \cdot A^{-1} \rightsquigarrow A^T = A^{-1}$$

$$\underline{3' \Rightarrow 4}$$

$$A A^T = I \quad (\text{jw. lub:})$$

$$\det(A A^T) = \det I = 1$$

$$\stackrel{||}{\det(A)} \cdot \det A^T$$

$\neq 0$

$\det A \neq 0 \Rightarrow A$  odwracalna

$$A^{-1} \setminus A A^T = I \rightsquigarrow A^T = A^{-1}$$

□

Przykład.

Czy poniższa macierz może być macierzą izometrii? Z jaką trzecią kolumną?

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$   
 $U \quad \quad V \quad \quad W$

Czy  $\|U\| = \|V\| = 1, \langle U, V \rangle = 0$ ?  $\|V\| = \sqrt{\frac{3}{2}} \neq 1$  — NIE

Poprawka:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & \cdot \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & \cdot \\ -1/\sqrt{3} & 0 & \cdot \end{pmatrix}$$

$U \quad \quad V \quad \quad W$

$$\|U\| = 1, \|V\| = 1, \langle U, V \rangle = 0$$

Możliwe  $W$ :

$$W = \pm U \times V$$

$$U \times V = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \text{ możliwe } W: \pm \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

## Klasyfikacja liniowych izometrii $\mathbf{R}^3$

Niech  $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  będzie liniową izometrią.

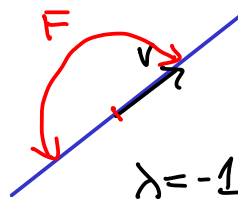
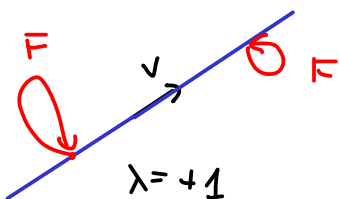
$F$  ma rzeczywistą wartość własną  $\lambda$  i odpowiadający jej jednostkowy wektor własny  $v$ .

**Lemat 1.**  $\lambda = \pm 1$ .

Dowód

$$1 = \|v\| = \|F(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| = |\lambda| \cdot 1 = |\lambda|$$

ale  $\lambda \in \mathbf{R}$ , więc  $\lambda = \pm 1$ .  $\square$



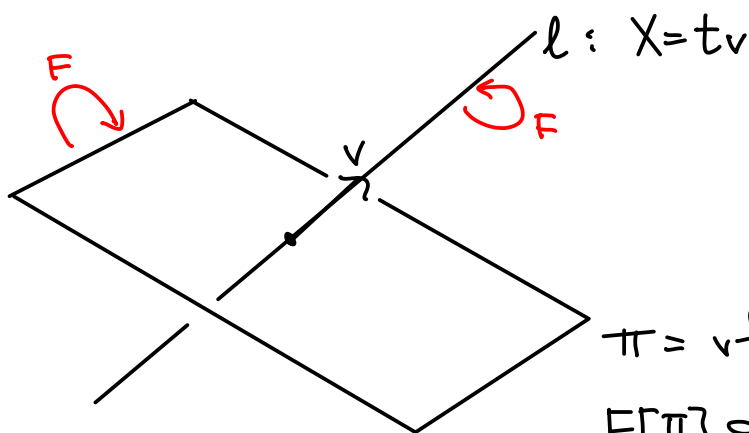
**Lemat 2.** Jeśli  $w \perp v$ , to  $F(w) \perp v$ .

D-d;

$$\lambda \langle v, F(w) \rangle = \langle \lambda v, F(w) \rangle = \langle F(v), F(w) \rangle = \langle v, w \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle v, F(w) \rangle = 0 \Rightarrow F(w) \perp v$$

$\square$



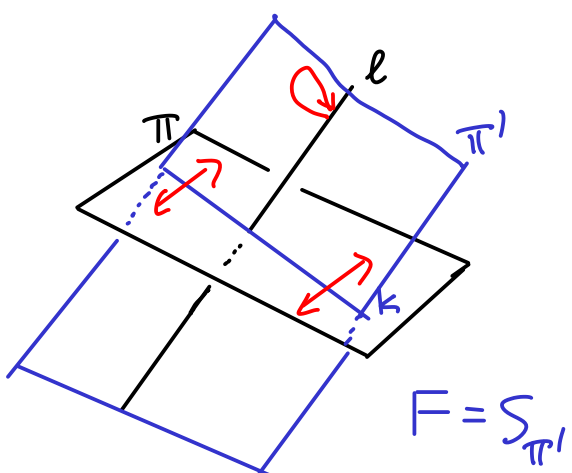
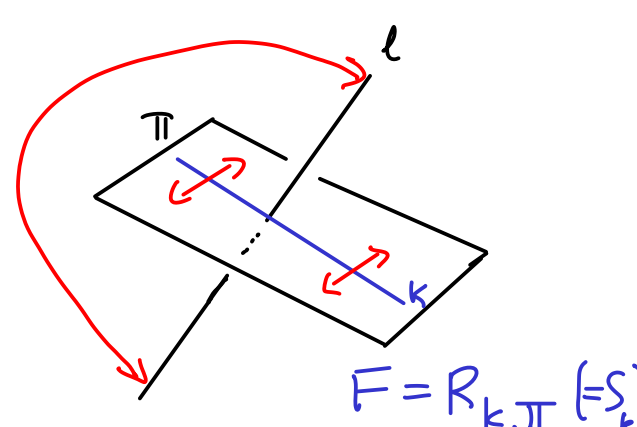
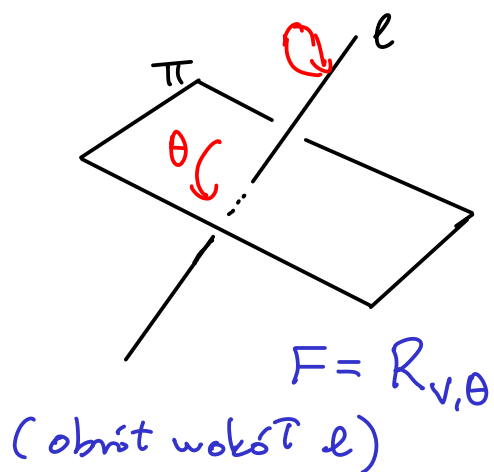
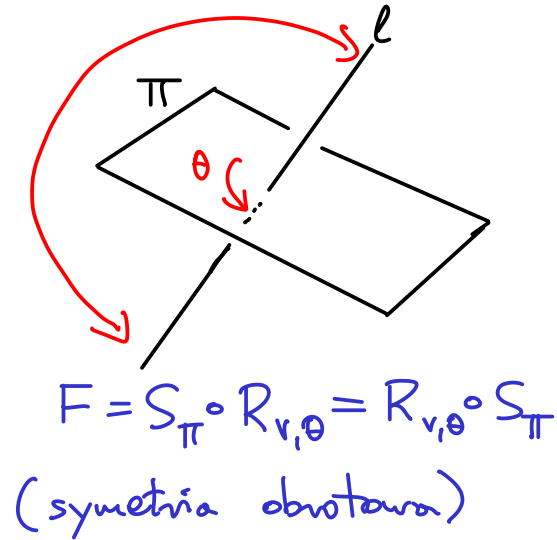
$$\pi = v^\perp = \{w \in \mathbf{R}^3 \mid \langle v, w \rangle = 0\}$$

$$F[\pi] \subseteq \pi$$

Konkluzja:  $F$  zachowuje zarówno prostą  $\ell = \{tv \mid t \in \mathbf{R}\}$ , jak i prostopadłą do niej płaszczyznę  $\pi = \{w \in \mathbf{R}^3 \mid w \perp v\}$ .

Niech  $G: \pi \rightarrow \pi$  będzie ograniczeniem  $F$  do  $\pi$ ;  $G$  jest izometrią płaszczyzny  $\pi$  zachowującą 0, zatem jest obrotem lub symetrią względem przechodzącej przez 0 prostej.

Tabela klasyfikacyjna

|                 | $\lambda = 1$<br>$F(v) = v$                                                                                                                                                    | $\lambda = -1$<br>$F(v) = -v$                                                                                                                                                                                      |
|-----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $G$<br>symetria |  <p><math>F = S_{\pi'}</math></p>                                                             |  <p><math>F = R_{k, \pi} (= S_k)</math></p>                                                                                      |
| $G$ -<br>obrót  |  <p><math>F = R_{v, \theta}</math><br/>                     (obrot wokół <math>l</math>)</p> |  <p><math>F = S_{\pi} \circ R_{v, \theta} = R_{v, \theta} \circ S_{\pi}</math><br/>                     (symetria obrotowa)</p> |

**Twierdzenie.** Liniowa izometria  $\mathbf{R}^3$  jest obrotem wokół prostej lub symetrią obrotową.

### Jak napisać macierz obrotu?

$m(R_{u,\theta})$  wyliczymy jako  $PAP^{-1}$ , gdzie  $A$  będzie macierzą tegoż obrotu w dobrze dobranym liniowym prostokątnym układzie współrzędnych, a  $P$  macierzą przejścia.

Ten nowy układ współrzędnych będzie związany z ortonormalną bazą  $(U, V, W)$ :

$$U = \frac{u}{\|u\|};$$

$(V, W)$  to ortonormalna baza płaszczyzny  $U^\perp$ ;

$(U, V, W)$  jest dodatnio zorientowana (czyli np.  $W = U \times V$ ).

$$P = (U, V, W), \quad P^{-1} = P^\top, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$m(R_{u,\theta}) = PAP^{-1}$$

$$m(S_{u^\perp} \circ R_{u,\theta}) = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\det R_{u,\theta} = \det m(R_{u,\theta}) = \det(PAP^{-1}) = \det A = 1$$

$$\det(S_{u^\perp} \circ R_{u,\theta}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = -1$$

Przykład.

$$m(R_{(1,2,1)^T, \theta}) = ?$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V - \text{jednostkowy, } \perp U: \quad V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W = U \times V = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$P = (U, V, W), \quad P^{-1} = P^T$$

$$m(S_{u^+} \circ R_{u, \theta}) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{-1}{\downarrow} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ -1/\sqrt{30} & -2/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix} = \dots$$