## Kolokwium z algebry liniowej B1, 23 października 2006

*Zadanie* 1. Dla jakich wartości parametru $t$ wektory $\binom{1+t}{2+2t}$ i $\binom{1-t}{1-2t}$ są liniowo niezależne?

*Zadanie* 2. Prosta $\ell$ przechodzi przez punkty $A = \binom{2}{4}$ i $B = \binom{-1}{-2}$. Znajdź dowolny niezerowy wektor $v$ o tej własności, że kąt pomiędzy prostą wyznaczoną przez $v$ i prostą $\ell$ wynosi $\frac{\pi}{6}$.

*Zadanie* 3. Wiadomo, że $A = \binom{2}{4}$, $B = \binom{-1}{2}$, $U = \binom{3}{-1}$, $V = \binom{1}{1}$, a $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest przekształceniem liniowym o tej własności, że $F(A + tU) = B + tV$ zachodzi dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$. Znajdź macierz przekształcenia $F$.

*Zadanie* 4. O liczbach $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ wiadomo, że dla dowolnych $e, f \in \mathbb{R}$ układ równań $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ ma co najmniej jedno rozwiązanie. Udowodnij, że dla dowolnych $e, f \in \mathbb{R}$ powyższy układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie.

## Kolokwium z algebry liniowej B1, 30 października 2007

*Zadanie* 5. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ wektor $U = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$ nie jest kombinacją liniową wektorów $A = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 2 \\ t+1 \end{bmatrix}$. Odpowiedź uzasadnij.

*Zadanie* 6. Niech $F_M$ będzie przekształceniem liniowym płaszczyzny o macierzy $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ zaś $T_P$ translacją o wektor $P = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$. Definiujemy przekształcenie płaszczyzny $G = F_M \circ T_P$. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $G^{49}(U), G^{49}(V), G^{49}(W)$, gdzie $U = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $W = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Odpowiedź uzasadnij.

*Zadanie* 7. Niech $U = \binom{5}{5}$, $W = \binom{7}{1}$, zaś $\ell$ niech będzie prostą, taką że $S_\ell(U) = W$.

a) Uzasadnij, że $\binom{0}{0} \in \ell$.

b) Znajdź $m(S_\ell)$.

*Zadanie* 8. O wektorach $U, V, W \in \mathbb{R}^2$ wiadomo, że ich długości wynoszą: $\|U\| = \sqrt{13}$, $\|V\| = \sqrt{5}$, $\|W\| = \sqrt{10}$, natomiast iloczyny skalarne pomiędzy nimi: $\langle U, V\rangle = -4$, $\langle V, W\rangle = -1$, $\langle W, U\rangle = -9$. Udowodnij, że $U + V + W = \vec{0}$.

*Zadanie* 9. Przez $\mathbb{Z}^2 = \left\{\binom{x}{y} : x, y \in \mathbb{Z}\right\}$ oznaczamy zbiór punktów płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych. Podaj przykład macierzy $A$ (o rozmiarze $2 \times 2$ i wyrazach rzeczywistych), której wszystkie wyrazy są różne od zera i o tej własności, że odpowiadające jej odwzorowanie $F_A$ spełnia $F_A[\mathbb{Z}^2] = \mathbb{Z}^2$. Uzasadnij, że podany przez Ciebie przykład spełnia warunki zadania.

*Zadanie* 10. Znajdź odwzorowanie liniowe $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (to znaczy: znajdź jego macierz) o tej własności, że $P[k] = k'$ oraz $P[\ell] = \ell'$, gdzie $k$ jest prostą o równaniu $2x + 3y = 2$, $\ell$ jest prostą o równaniu $x - 2y = 1$, $k'$ jest prostą o równaniu $2x - 5y = -1$, a $\ell'$ jest prostą o równaniu $3x - 4y = 2$.

## Kolokwium z algebry liniowej B1. 4 listopada 2003

*Zadanie* 11.

a) Ile jest prostych przecinających prostą $x = 2$ w punkcie $\binom{2}{0}$ pod kątem $30°$? Uzasadnij odpowiedź rysunkiem.

b) Znajdź równanie ogólne prostej przechodzącej przez punkt $\binom{2}{0}$, która przecina prostą $x = 2$ pod kątem $30°$, zaś prostą $-x + y = -2$ pod kątem $75°$.

*Zadanie* 12. Oblicz $\langle G(X), G^{-1}(Y)\rangle$, wiedząc że $G = C \circ D$, $m(C) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $m(D) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $X = \binom{-1}{3}$, $Y = \binom{2}{2}$.

*Zadanie* 13.

a) Uzasadnij, że jeśli $G$ jest przekształceniem liniowym, to $G(0) = 0$.

b) Załóżmy, że $G$ jest przekształceniem liniowym, zaś $U$ niezerowym wektorem, przy czym przekształcenie $T_{-U} \circ G \circ T_{3U}$ jest liniowe. Udowodnij, że $U$ jest wektorem własnym przekształcenia $G$ i znajdź odpowiadającą mu wartość własną.

*Zadanie* 14. Niech $G$ będzie liniowym przekształceniem płaszczyzny, takim że $\det G = 2$. Udowodnij, że istnieje wektor $U \in \mathbb{R}^2$, taki że $\|U\| = 1$, $\|G^{20}(U)\| > 1000$.

## Kolokwium z algebry liniowej B1, 8 listopada 2004

*Zadanie* 15. Wysokości trójkąta $ABC$ przecinają się w punkcie $H$. Wiadomo, że $A = \binom{4}{-2}$, $B = \binom{-1}{3}$, $H = \binom{1}{-1}$. Wyznacz współrzędne punktu $C$.

*Zadanie* 16. Niech $U = \binom{3}{4}$, $W = \binom{0}{5}$, zaś $\ell$ niech będzie prostą, taką że $S_\ell(U) = W$.

a) Uzasadnij, że $\binom{0}{0} \in \ell$.

b) Znajdź $m(S_\ell)$.

*Zadanie* 17. Punkt $P$ leży na boku $AB$ równoległoboku $ABCD$. Udowodnij, że $\det(\vec{PC}, \vec{PD}) = \det(\vec{AB}, \vec{AD})$.

*Zadanie* 18. Podaj przykład odwracalnej macierzy $A$ i niezerowego wektora $X \in \mathbb{R}^2$, takich że $X$ nie jest wektorem własnym $A$, a mimo to punkty $A^{-1}X$, $X$, $AX$ leżą na jednej prostej. Sprawdź żądane własności.

*Zadanie* 19. Znajdź jawny wzór na $n$-ty wyraz ciągu zadanego rekurencyjnie: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$ dla $n \geq 1$.

*Zadanie* 20. Niech $\mathbf{0}$ oznacza macierz zerową: $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Podaj przykład macierzy $A$, takiej że $A \neq \mathbf{0}$, ale $A^2 = \mathbf{0}$.

b) Udowodnij, że jeśli $B$ jest macierzą i $B^{98} = \mathbf{0}$, to $B^2 = \mathbf{0}$.

## Kolokwium z algebry liniowej B1, 21 listopada 2005

*Zadanie* 21. Ile jest liniowych izometrii $\mathbb{R}^2$ o śladzie $\sqrt{3}$ ? Znajdź je wszystkie; napisz ich macierze.

*Zadanie* 22. Znajdź jawny wzór na $n$-ty wyraz ciągu zadanego rekurencyjnie: $a_0 = 4$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = -3a_n + 10a_{n-1}$ dla $n \geq 1$.

*Zadanie* 23. Załóżmy, że wektory $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ spełniają warunek $\|A+B+C\| = 9$. Czy wynika stąd, że przynajmniej jeden z wektorów $A, B, C$ a) ma długość $\geq 3$? b) ma długość $\leq 3$?

*Zadanie* 24. Niech $\ell$ oznacza prostą o równaniu $x = 1$, zaś $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ niech będzie przekształceniem liniowym o następującej własności: jeśli $p \in \ell$, to $F(p) \in \ell$.

a) Udowodnij, że $\binom{0}{1}$ jest wektorem własnym $F$.

b) Udowodnij, że 1 jest wartością własną $F$.

c) Udowodnij, że jeśli wartość własna $F$ odpowiadająca wektorowi własnemu $\binom{0}{1}$ nie jest równa 1, to istnieje punkt $q \in \ell$ taki że $F(q) = q$.

*Zadanie* 25. Jaka jest największa możliwa długość wektora $A$, jeśli wiadomo, że $|\langle\binom{1}{1}, A\rangle| \leq 1$ i $|\langle\binom{1}{2}, A\rangle| \leq 1$ ? (Wsk: rysunek może pomóc.)

## Kolokwium z algebry liniowej B1, 30 listopada 2006

*Zadanie* 26 (10 punktów). Oblicz $\begin{bmatrix} -7 & 13 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}^{17}$. Nie pomyl się w rachunkach.

*Zadanie* 27 (10 punktów). Znajdź obraz (to znaczy: znajdź jego równanie ogólne) krzywej $C \subseteq \mathbb{R}^2$ o równaniu $3x^2 + 4xy + 7y^2 = 1$ w symetrii względem prostej o równaniu $y = \frac{3}{4}x$.

*Zadanie* 28 (10 punktów). Na krzywej $C \subseteq \mathbb{R}^2$ o równaniu $2x^2 - 72xy + 23y^2 = 50$ znajdź punkt najbliższy początkowi układu współrzędnych. Jeśli takich punktów jest więcej, wystarczy że znajdziesz jeden z nich. Wskazówka: rysunek może pomóc.

*Zadanie* 29 ($2 + 8$ punktów).

- zapisz w postaci $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ iloczyn $(2 + i)(5 + i)(8 + i)$;
- o kątach $\alpha, \beta, \gamma$ wiadomo, że $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ oraz że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{8}$. Oblicz $\alpha + \beta + \gamma$. Wskazówka: rysunek i liczby zespolone mogą pomóc.

*Zadanie* 30 (10 punktów). Funkcja $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest przekształceniem liniowym i wiadomo, że wektory $\binom{1}{1}$, $\binom{1}{-1}$, $\binom{-2}{0}$ są jego wektorami własnymi. Udowodnij, że $A$ jest jednokładnością.

*Zadanie* 31 ($3 + 7$ punktów).

- Podaj przykład przekształcenia liniowego $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (to znaczy: jego macierz), którego wartościami własnymi są $-1$ i $1$, a które nie jest izometrią. Uzasadnij krótko, dlaczego podana przez Ciebie macierz spełnia warunki zadania.
- O przekształceniu liniowym $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wiadomo, że jego wartościami własnymi są $-1$ i $1$. Udowodnij, że $A^4$ jest izometrią.

## Kolokwium 2 z Algebry liniowej B1, 11 grudnia 2007

*Zadanie* 32. Podaj przykład elipsy (to znaczy: podaj odpowiadające jej równanie ogólne krzywej drugiego stopnia) o tej własności, że jej długości półosi wynoszą 2 i 3 oraz że jedną z jej osi symetrii jest prosta $3x - 4y = 0$. Uzasadnij, że podane przez Ciebie równanie spełnia warunki zadania.

*Zadanie* 33.

- Oblicz $\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}^{98}$. Jeśli odpowiedź nie wynika z rachunku, uzasadnij ją.

- Oblicz $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{98}$. Jeśli odpowiedź nie wynika z rachunku, uzasadnij ją.

*Zadanie* 34. Czy podane równanie ma (co najmniej jedno) rozwiązanie w zbiorze liczb zespolonych? W każdym przypadku odpowiedź krótko uzasadnij.

- $z^2 + 16z + 720 = 0$;
- $z^{12} + 16z^6 + 720 = 0$;
- $z^3 + 27z^2 - 256z + 1024 = 0$;
- $z^7 + (12 + 12i)\, z^6 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) z^5 - 4z^4 + 4iz^3 + \sqrt{3}z^2 - \sqrt{3}z + 12 = 0$;
- $z\,\overline{z} + 4 = 0$;
- $(3 + 2i)z + (3 - 2i)\overline{z} = 5 - 6i$;

*Zadanie* 35. Krzywa $C$ zadana jest równaniem

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 - 4xy + 7y^2 = 10 \right\}.$$

Podaj przykład izometrii liniowej $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (to znaczy: podaj jej macierz) różnej od identyczności oraz różnej od symetrii środkowej oraz o tej własności, że $P[C] = C$. Uzasadnij, że podana przez Ciebie macierz spełnia warunki zadania.

*Zadanie* 36.

- (łatwe) Podaj przykład macierzy $A \in M_2(\mathbb{C})$ o tej własności, że $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.
- (trudne) Podaj przykład macierzy $A \in M_2(\mathbb{C})$ o tej własności, że $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.

*Zadanie* 37. $C$ jest parabolą o równaniu

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 \right\},$$

zaś $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest odwzorowaniem liniowym o tej własności, że $P[C] = C$.

- (łatwe) Uzasadnij, że $P$ jest odwzorowaniem odwracalnym.
- (trudne) Uzasadnij, że $\binom{0}{1}$ oraz $\binom{1}{0}$ są wektorami własnymi $P$.
- (łatwe) Załóżmy, że $\binom{0}{1}$ oraz $\binom{1}{0}$ są wektorami własnymi $P$. Niech $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $(\lambda \neq \mu)$ będą pierwiastkami wielomianu charakterystycznego odwzorowania $P$. Udowodnij, że $\lambda = \mu^2$ lub $\mu = \lambda^2$.

## Kolokwium z algebry liniowej B1, 19 grudnia 2005

*Zadanie* 38. Niech $A = \begin{bmatrix} 100 & \frac{401}{200} \\ 50 & 1 \end{bmatrix}$. Udowodnij, że dla dowolnego $X \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{n \to +\infty} \det(A^n X, A^{n+1} X) = 0.$$

*Zadanie* 39. Prosta $L_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ dana jest równaniem $2x - y = 7$, a $L_2$ jest prostą równoległą do wektora $U_1 = \binom{1}{-1}$ przechodzącą przez punkt $U_2 = \binom{0}{2}$. Znajdź równanie parametryczne prostej $L_1$ i równanie ogólne prostej $L_2$. Znajdź cosinus kąta ostrego między prostymi $L_1$ i $L_2$.

*Zadanie* 40. Znajdź pewne dwa wektory własne macierzy $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, takie że rozpinany przez nie równoległobok ma pole 3.

*Zadanie* 41. Załóżmy, że $U = \binom{3}{4}$, $V = \binom{0}{5}$, $\ell$ jest prostą w $\mathbb{R}^2$ przechodzącą przez $\binom{0}{0}$, $S_\ell$ jest symetrią (osiową) względem $\ell$ oraz $S_\ell(U) = V$. Znajdź $m(S_\ell)$.

*Zadanie* 42. Znajdź taką wartość parametru $a$, by poniższy układ był niesprzeczny dla dokładnie jednej wartości parametru $b$. Czy takie $a$ jest jedyne? Wszystkie odpowiedzi uzasadnij. [układ nazywamy niesprzecznym, jeśli ma co najmniej jedno rozwiązanie]

$$\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ ax + 3y = b \end{cases}$$

*Zadanie* 43. Załóżmy, że $F$ jest liniowym przekształceniem $\mathbb{R}^2$, wektory $A, B \in \mathbb{R}^2$ są niewspółliniowe i $F(A) = B$, $F(B) = A$. Wyznacz wartości własne $F$.

### Kolokwium 3 z Algebry liniowej B1, 15 stycznia 2008

*Zadanie* 44. Macierz $A$ zadana jest jako $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, a macierz $B$ jest jej odwrotnością: $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = A^{-1}$. Oblicz $b_{21}$ oraz $b_{13}$.

*Zadanie* 45. Czworościan $ABCD$ ma wierzchołki: $A = [3, 5, 2]^T$, $B = [3, 2, -1]^T$, $C = [4, 3, 0]^T$, $D = [2, 3, -1]^T$.

a) oblicz pole ściany $ABC$;

b) oblicz objętość czworościanu $ABCD$;

c) oblicz wysokość $h$ (to znaczy: jej długość) opuszczoną z wierzchołka $D$ na płaszczyznę $ABC$.

*Zadanie* 46. Znajdź postać ogólną rozwiązania układu $AX = Y$ dla: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 \end{bmatrix}$ oraz a) $Y = (0, 0, 0)^T$; b) $Y = (1, 1, 1)^T$; c) $Y = (1, -2, 3)^T$; d) $Y = (-6, -3, 3)^T$; e) $Y = (2, 4, 2)^T$; f) $Y = (-1, 3, 0)^T$; g) $Y = (1, 0, 3)^T$;

*Zadanie* 47.

a) Podaj przykład przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (to znaczy: podaj jego macierz) o tej własności, że $F[\Pi] = \ell$, gdzie $\Pi$ jest płaszczyzną $\Pi = \{[x, y, z]^T : 2x + 3y - z = 0\}$, a $\ell$ jest prostą $\ell = \{t[1, 4, 2]^T : t \in \mathbb{R}\}$. Uzasadnij, że podane przez Ciebie przekształcenie ma żądane własności.

b) O przekształceniu liniowym $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wiadomo, że $F[\Pi] = \ell$, gdzie $\Pi$ jest płaszczyzną $\Pi = \{[x, y, z]^T : 2x + 3y - z = 0\}$, a $\ell$ jest prostą $\ell = \{t[1, 4, 2]^T : t \in \mathbb{R}\}$. Udowodnij, że przekształcenie $F$ nie jest odwracalne.

*Zadanie* 48.

1. Udowodnij, że macierz $A = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 20 & 9 & 12 \\ -15 & 12 & 16 \\ 0 & -20 & 15 \end{bmatrix}$ jest macierzą obrotu (wokół pewnej prostej).

2. Macierz $A = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 20 & 9 & 12 \\ -15 & 12 & 16 \\ 0 & -20 & 15 \end{bmatrix}$ jest macierzą obrotu wokół pewnej prostej $\ell$ o kąt $\alpha$. Oblicz jedną z następujących wielkości: $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin 2\alpha, \cos 2\alpha$.

3. Macierz $A = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 20 & 9 & 12 \\ -15 & 12 & 16 \\ 0 & -20 & 15 \end{bmatrix}$ jest macierzą obrotu wokół pewnej prostej $\ell$ o kąt $\alpha$. Wyznacz parametryczne równanie prostej $\ell$.

*Zadanie* 49. Znajdź dowolne dwa liniowo niezależne wektory własne oraz stowarzyszone z nimi wartości własne przekształcenia $P_{\Pi_2} \circ P_{\Pi_1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gdzie $P_{\Pi_1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę $\Pi_1 = \{[x,y,z]^T : x + 2y - 2z = 0\}$, zaś $P_{\Pi_2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę $\Pi_2 = \{[x,y,z]^T : 3x + 4z = 0\}$. **Wskazówka: jeśli chwilę się zastanowisz nad interpretacją geometryczną wektorów własnych, możesz zrobić to zadanie bez wyliczania jakichkolwiek macierzy.**

### Kolokwium 3 z algebry liniowej B1, 18 stycznia 2007

*Zadanie* 50 (4+4+4=12 punktów). Czworościan $ABCD$ ma wierzchołki: $A = [3,5,2]^T$, $B = [3,2,-1]^T$, $C = [4,3,0]^T$, $D = [2,3,-1]^T$.

a) oblicz pole ściany $ABC$;

b) oblicz objętość czworościanu $ABCD$;

c) oblicz wysokość $h$ (to znaczy: jej długość) opuszczoną z wierzchołka $D$ na płaszczyznę $ABC$.

*Zadanie* 51 (6+6=12 punktów).

a) Niech płaszczyzna $\Pi$ będzie równoległa do prostej

$$\frac{x-7}{2} = \frac{2y-3}{6} = -z$$

oraz równoległa do prostej $X = (0,10,7)^T + t(2,1,1)^T$, i niech przechodzi przez punkt $P = (-5,2,-6)^T$. Wyznacz równanie ogólne płaszczyzny $\Pi$.

b) Wyznacz równanie parametryczne prostej będącej przekrojem płaszczyzny o równaniu $3x - 2y = 8$ i płaszczyzny o równaniu $2x + y = 2$.

*Zadanie* 52 (5+7=12 punktów).

a) Podaj przykład przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (to znaczy: znajdź jego macierz), które jest izometrią i którego wielomian charakterystyczny ma następujące pierwiastki: 1, $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Uzasadnij krótko, dlaczego podana przez Ciebie macierz ma żądane własności.

b) Podaj przykład przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (to znaczy: znajdź jego macierz), które nie jest izometrią i którego wielomian charakterystyczny ma następujące pierwiastki: $1$, $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Uzasadnij krótko, dlaczego podana przez Ciebie macierz ma żądane własności.

*Zadanie* 53 (6+6=12 punktów).

a) Znajdź wartości i wektory własne macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 8 & -5 \\ -3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$.

b) Podaj równanie ogólne płaszczyzny $\Pi$ przechodzącej przez początek układu współrzędnych o tej własności, że $F[\Pi] = \Pi$, gdzie $F$ jest przekształceniem liniowym o macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 8 & -5 \\ -3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$. Takich płaszczyzn jest kilka, wystarczy że podasz równanie jednej z nich.

*Zadanie* 54 (6+6=12 punktów).

a) Podaj przykład przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (to znaczy: podaj jego macierz) o tej własności, że $F[\Pi] = \ell$, gdzie $\pi$ jest płaszczyzną $\Pi = \{[x, y, z]^T : 2x + 3y - z = 0\}$, a $\ell$ jest prostą $\ell = \{t[1, 4, 2]^T : t \in \mathbb{R}\}$.

b) O przekształceniu liniowym $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wiadomo, że $F[\Pi] = \ell$, gdzie $\Pi$ jest płaszczyzną $\Pi = \{[x, y, z]^T : 2x + 3y - z = 0\}$, a $\ell$ jest prostą $\ell = \{t[1, 4, 2]^T : t \in \mathbb{R}\}$. Udowodnij, że przekształcenie $F$ nie jest odwracalne.

## Egzamin z algebry liniowej B1, 17 lutego 2004

*Zadanie* 55. Znajdź macierze: diagonalną $D$ i odwracalną $P$, takie że $D = P \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} P^{-1}$.

*Zadanie* 56. Rozstrzygnij, czy powierzchnia jest elipsoidą:

a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2yz = 1$; (2 pkt.)

b) $x^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 1$; (2 pkt.)

Dla każdej ze znalezionych elipsoid wyznacz objętość obszaru przez nią ograniczonego (2 pkt.). (Wsk. Objętość obszaru ograniczonego przez elipsoidę o półosiach $a, b, c$ jest równa $\frac{4}{3}\pi abc$.)

*Zadanie* 57. Rozwiąż układy równań:

$a) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = 2 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = 1 \end{cases}$ $b) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = -1 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = 0 \end{cases}$ $c) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = 3 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = -1 \end{cases}$ $d) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = 0 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = 2 \end{cases}$

$e) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = 1 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = 0 \end{cases}$ $f) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = -1 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = 2 \end{cases}$ $g) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = 2 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = -1 \end{cases}$ $h) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = 1 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = 2 \end{cases}$

$i) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = 1 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = 1 \end{cases}$ $j) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = -1 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = -2 \end{cases}$ $k) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = -1 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = -3 \end{cases}$ $\ell) \begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y = 2 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}y = 4 \end{cases}$

*Zadanie* 58. Podaj przykład przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, którego obraz jest płaszczyzną, jądro jest prostą, zaś kąt między jądrem a obrazem wynosi $60^\circ$. (Napisz macierz takiego przekształcenia.)

*Zadanie* 59. Podaj przykład trzech izometrii $F, G, H$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, takich że $F \circ G \circ H = \mathrm{Id}$, ale $H \circ G \circ F \neq \mathrm{Id}$.

*Zadanie* 60. Udowodnij, że jeśli $\mathrm{Im}(z) = 0$, to $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1$.

*Zadanie* 61. Niech $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będą przekształceniami liniowymi. Załóżmy, że jądro każdego z nich jest płaszczyzną. Wykaż, że $\det(F+G) = 0$.

*Zadanie* 62. Udowodnij, że dla dowolnej macierzy $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ macierz $A^\top A$ jest diagonalizowalna (2 pkt.) i ma nieujemne wartości własne (4 pkt.).

*Zadanie* 63. Niech $E$ będzie elipsoidą $(\frac{x}{4})^2 + (\frac{y}{3})^2 + (\frac{z}{2})^2 = 1$, zaś $P = (1,2,1)^\top$. Podaj przykład liniowej izometrii $F$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, takiej że $P$ leży na zewnątrz elipsoidy $F[E]$ (napisz macierz takiej izometrii).

## Egzamin z algebry liniowej B1, 6 lutego 2005

*Zadanie* 64. Rozstrzygnij, czy powierzchnia $2x^2 - 2xy + 2y^2 + 4xz + z^2 = 2$ jest elipsoidą, hiperboloidą jednopowłokową czy hiperboloidą dwupowłokową.

*Zadanie* 65. Niech $\ell$ będzie prostą $\frac{x+7}{2} = y - 5 = \frac{z-6}{3}$, zaś $\Pi$ płaszczyzną $-2x + y + z - 1 = 0$. Rozstrzygnij, czy $\ell$ i $\Pi$ przecinają się (tzn. czy mają niepusty przekrój). Jeśli przecinają się, znajdź kąt między nimi; jeśli nie, znajdź odległość prostej $\ell$ od płaszczyzny $\Pi$.

*Zadanie* 66. Rozstrzygnij, w zależności od wartości (rzeczywistego) parametru $t$, ile rozwiązań ma układ równań

$$\begin{cases} tx + 2y = -t \\ x + (t+1)y = -1 \end{cases}$$

*Zadanie* 67. Podaj przykład odwracalnej macierzy $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, takiej że obrazem płaszczyzny $2x - y + 3z = 0$ przez przekształcenie $F_A$ jest płaszczyzna $x + y - 2z = 0$.

*Zadanie* 68. Oblicz ślad macierzy $\begin{bmatrix} 2\sqrt{2}+1 & \sqrt{2}+1 \\ -2\sqrt{2}-2 & -\sqrt{2}-2 \end{bmatrix}^{15}$

[W tym zadaniu szczególnie łatwo się pomylić; licz starannie.]

*Zadanie* 69. Niech $M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Załóżmy, że dla każdego dodatniego całkowitego $n$ każdy wyraz macierzy $M^n$ jest co do modułu mniejszy niż 2000. Udowodnij, że wszystkie wartości własne $M$ (również te zespolone) są co do modułu mniejsze niż $\sqrt{2}$.

[Mówimy, że $x$ jest co do modułu mniejsze niż $C$, jeśli $|x| < C$.]

*Zadanie* 70. Niech $A, B \in \mathbb{R}^3$ będą wektorami długości 1. Niech $\Omega(A,B)$ będzie zbiorem wszystkich wektorów z $\mathbb{R}^3$ które można uzyskać z wektorów $A, B$ przez (wielokrotne) stosowanie operacji iloczynu wektorowego (np. $\Omega(A,B) \ni A, B \times B, (A\times B)\times B, (A\times B)\times(B\times A)$ itp.). Zbadaj, ile elementów może mieć zbiór $\Omega(A,B)$ (w zależności od wzajemnego położenia wektorów $A, B$).

[Bardziej formalna definicja zbioru $\Omega(A,B)$: $\Omega_0(A,B) = \{A,B\}$; $\Omega_{n+1}(A,B) = \{X \times Y : X, Y \in \Omega_n(A,B)\}$ dla $n = 0,1,2,\ldots$; $\Omega(A,B) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n(A,B)$.]

## Egzamin z algebry liniowej B1, 6 lutego 2006

*Zadanie* 71. Oblicz

$$\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}.$$

*Zadanie* 72. Powierzchnia $z^2 + 4xy = 1$ ma w pewnym prostokątnym układzie współrzędnych $x'y'z'$ równanie o postaci kanonicznej. Znajdź taki układ (wyraź $x', y', z'$ przez $x, y, z$) i ową postać kanoniczną. Wyznacz długości półosi (jeśli rozważana powierzchnia jest elipsoidą) lub tangensy kątów półrozwarcia stożka asymptotycznego (jeśli jest hiperboloidą).

*Zadanie* 73. Niech płaszczyzna $\pi$ będzie zadana równaniem $x = 0$, zaś płaszczyzna $\pi'$ równaniem $x = 2$. Znajdź odległość między płaszczyznami $F_A[\pi]$, $F_A[\pi']$, dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

*Zadanie* 74. Załóżmy, że $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ma następującą własność: $(\forall X \in \mathbb{R}^2)(\|AX\| < \|X\|+5)$. Udowodnij, że zachodzi wówczas: $(\forall X \in \mathbb{R}^2)(\|AX\| \leq \|X\|)$.

*Zadanie* 75. Podaj przykład macierzy $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, takiej że $\chi_A(x) = -x^3 + 3x^2$ i obraz przekształcenia zadanego macierzą $A$ jest płaszczyzną.

*Zadanie* 76. Niech $C$ będzie elipsą zadaną równaniem $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$. Podaj przykład przekształcenia liniowego $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, które zachowuje $C$ (tzn. $F[C] = C$) a nie jest izometrią.

*Zadanie* 77. Znajdź $P \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$, takie że

$$\begin{bmatrix} 8 & -15 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} P^{-1}.$$

*Zadanie* 78. Załóżmy, że $F$ jest liniowym przekształceniem $\mathbb{R}^3$, takim że $F[\mathbb{Z}^3] = \mathbb{Z}^3$. Udowodnij, że $\det F = \pm 1$. (Szczegółowo opisz i uzasadnij wszystkie kroki swojego rozumowania.)

## Egzamin z algebry liniowej B1, 30 stycznia 2007

*Zadanie* 79.

a) Zapisz w postaci $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ liczbę $z = (-1 + i)^{22}$.

b) Rozwiąż równanie

$$z^2 - (8 + 2i)z + 15 + 7i = 0.$$

Każdy znaleziony pierwiastek zapisz w postaci $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

*Zadanie* 80. Co to za krzywa (elipsa, hiperbola, para prostych, parabola, punkt, zbiór pusty,...) na płaszczyźnie? Jeśli jest to elipsa, znajdź równania (ogólne lub parametryczne) jej osi symetrii oraz długości półosi. Jeśli jest to hiperbola, znajdź równania (ogólne lub parametryczne) jej asymptot. Jeśli jest to para prostych, podaj ich równania (ogólne lub parametryczne). Jeśli jest to parabola, znajdź równanie (ogólne lub parametryczne) jej osi symetrii oraz współrzędne jej wierzchołka. Jeśli jest to punkt, podaj jego współrzędne.

a)

$$7x^2 - 12xy + 12y^2 - 3 = 0$$

b)

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 8x + 4y - 3 = 0$$

*Zadanie* 81. Ciągi $(a_n)$ i $(b_n)$ są zadane rekurencyjnie w następujący sposób: $a_1 = 4$, $b_1 = 1$ oraz

$$a_{n+1} = -5a_n + 4b_n,$$

$$b_{n+1} = -6a_n + 6b_n$$

dla dowolnego $n \geq 1$. Znajdź jawny wzór na wyrazy ciągu $(a_n)$.

*Zadanie* 82. Podaj przykład czworościanu $ABCD$ (to znaczy: podaj jego wierzchołki $A \neq B \neq C \neq D$) o tej własności, że krawędź $AB$ jest równoległa do wektora $[1, 3, -1]^T$, krawędź $BC$ jest równoległa do wektora $[2, 0, 1]^T$, krawędź $CD$ jest równoległa do wektora $[1, 1, 1]^T$, a krawędź $DA$ jest równoległa do wektora $[4, 2, -1]^T$.

*Zadanie* 83. Podaj przykład liniowo niezależnych wektorów $U, V, W \in \mathbb{R}^3$ oraz form kwadratowych $Q, S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o tej własności, że $Q \neq S$, ale $Q(U) = S(U)$, $Q(V) = S(V)$, $Q(W) = S(W)$.

*Zadanie* 84.

a) Podaj przykład przekształcenia liniowego $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (to znaczy: znajdź jego macierz) o tej własności, że $A\binom{3}{4} = \binom{6}{8}$ i takiego, że $A$ nie jest odwracalne.

b) Podaj przykład przekształcenia liniowego $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (to znaczy: znajdź jego macierz) o tej własności, że $A\binom{3}{4} = \binom{6}{8}$ i takiego, że $A$ się nie diagonalizuje.

*Zadanie* 85. Znajdź wartości i wektory własne przekształcenia $P_{\Pi_2} \circ P_{\Pi_1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gdzie $P_{\Pi_1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę $\Pi_1 = \{[x, y, z]^T : x + 2y - 2z = 0\}$, zaś $P_{\Pi_2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę $\Pi_2 = \{[x, y, z]^T : 3x + 4z = 0\}$. **Wskazówka: jeśli chwilę się zastanowisz nad interpretacją geometryczną wektorów własnych, możesz zrobić to zadanie bez wyliczania jakichkolwiek macierzy.**

*Zadanie* 86. O macierzach symetrycznych $A, B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ wiadomo, że ich wszystkie wartości własne są rzeczywiste i dodatnie. Udowodnij, że wszystkie wartości własne macierzy $A + B$ są rzeczywiste i dodatnie.

## Egzamin z Algebry liniowej B1, 4 lutego 2008

*Zadanie* 87.

1. Uzasadnij precyzyjnie, dlaczego odwzorowanie płaszczyzny $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadane wzorem
$$P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + xy \\ xy - y^2 \end{pmatrix}$$
nie jest odwzorowaniem liniowym.

2. O liczbach $s, t \in \mathbb{R}$ wiadomo, że odwzorowanie płaszczyzny $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadane wzorem
$$Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} \binom{2x+3y}{x+y} & \text{jeśli } x + 2y \neq 0, \\ \binom{tx+y}{sx-2y} & \text{jeśli } x + 2y = 0 \end{cases}$$
jest odwzorowaniem liniowym. Wyznacz $s$ i $t$.

*Zadanie* 88.

1. Zapisz w postaci $a + bi$ (gdzie $a, b \in \mathbb{R}$) liczbę $\frac{1+2i}{3+4i}$.

2. Zapisz w postaci $a + bi$ (gdzie $a, b \in \mathbb{R}$) liczbę $(1 + i\sqrt{3})^{70}$.

3. Rozwiąż równanie
$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$
Każdy pierwiastek zapisz w postaci $a + bi$ (gdzie $a, b \in \mathbb{R}$).

*Zadanie* 89. Znajdź jawny wzór na $n$-ty wyraz ciągu zadanego rekurencyjnie: $a_0 = 4$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = -3a_n + 10a_{n-1}$ dla $n \geq 1$.

*Zadanie* 90. Znajdź odległość pomiędzy parą prostych skośnych $k = \{[1,2,3]^T + t[2,2,1]^T : t \in \mathbb{R}\}$ i $\ell = \{[10,1,-1]^T + t[1,-1,1]^T : t \in \mathbb{R}\}$. **Przypomnienie: odległość pomiędzy parą prostych skośnych można zdefiniować na kilka równoważnych sposobów, np. jako odległość pomiędzy parą płaszczyzn równoległych, z których każda zawiera jedną z interesujących nas prostych lub jako minimalną odległość między parą punktów, z których pierwszy leży na pierwszej, a drugi leży na drugiej prostej.**

*Zadanie* 91. Znajdź dowolne trzy liniowo niezależne wektory własne oraz stowarzyszone z nimi wartości własne przekształcenia $P_\ell \circ P_\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gdzie $P_\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę $\Pi = \{[x,y,z]^T : x + 2y - 2z = 0\}$, zaś $P_\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest rzutem prostokątnym na prostą $\ell = \{t[0,4,3]^T : t \in \mathbb{R}\}$. **Wskazówka: jeśli chwilę się zastanowisz nad interpretacją geometryczną wektorów własnych, możesz zrobić to zadanie bez wyliczania jakichkolwiek macierzy.**

*Zadanie* 92. Elipsoida $E$ opisana jest równaniem $E = \{[x,y,z]^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\}$, zaś płaszczyzna $\Pi$ równaniem $\Pi = \{[x,y,z]^T \in \mathbb{R}^3 \in \mathbb{R}^3 : 2x + 2y + z = 0\}$. Przekrój elipsoidy $E$ i płaszczyzny $\Pi$ jest elipsą; wyznacz długości jej półosi.

*Zadanie* 93. O wektorach $U, V, W \in \mathbb{R}^3$ wiadomo, że ich długości wynoszą: $\|U\| = \sqrt{5}$, $\|V\| = 1$, $\|W\| = \sqrt{5}$, natomiast iloczyny skalarne pomiędzy nimi: $\langle U, V\rangle = -1$, $\langle V, W\rangle = -2$, $\langle W, U\rangle = 4$.

1. Udowodnij, że wektory $U, V, W$ są liniowo zależne.
2. Zapisz jeden z wektorów $U, V, W$ jako kombinację liniową pozostałych dwóch (to znaczy: znajdź współczynniki $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takie, że $U = \alpha V + \beta W$ lub...).

*Zadanie* 94 (12 punktów). O wektorach $P, Q, R, S \in \mathbb{R}^3$ wiadomo, że każde trzy z nich są liniowo niezależne oraz że są one wektorami własnymi odwzorowania liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Udowodnij, że $F$ jest jednokładnością.

## Egzamin poprawkowy z Algebry liniowej B1, 18 lutego 2008

*Zadanie* 95. Oblicz ślad macierzy $\begin{bmatrix} 2\sqrt{2}+1 & \sqrt{2}+1 \\ -2\sqrt{2}-2 & -\sqrt{2}-2 \end{bmatrix}^{15}$. W tym zadaniu szczególnie łatwo się pomylić; licz starannie.

*Zadanie* 96. Znajdź dowolne trzy liniowo niezależne wektory własne oraz stowarzyszone z nimi wartości własne przekształcenia $P_{\Pi_2} \circ S_{\Pi_1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gdzie $P_{\Pi_2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę $\Pi_2 = \{[x,y,z]^T : 2x + y + 2z = 0\}$, zaś $S_{\Pi_1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest symetrią względem płaszczyzny $\Pi_1 = \{[x,y,z]^T : x - 2y + 2z = 0\}$. **Wskazówka: jeśli chwilę się zastanowisz nad interpretacją geometryczną wektorów własnych, możesz zrobić to zadanie bez wyliczania jakichkolwiek macierzy.**

*Zadanie* 97. Na powierzchni $S \subset \mathbb{R}^3$ o równaniu $5x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 6xy - 4xz - 10yz = 1$ znajdź punkt najbliższy początkowi układu współrzędnych. Jeśli takich punktów jest więcej niż jeden, wystarczy że znajdziesz jeden z nich. **Wskazówka: dobry rysunek może pomóc.**

*Zadanie* 98. Niech $v = [2,3,4]^T$, zaś $\Pi$ niech będzie prostopadłą do niego płaszczyzną $\Pi = \{[x,y,z]^T : 2x + 3y + 4z = 0\}$. Przez $P_v$ i $P_\Pi$ oznaczamy rzut prostopadły odpowiednio: na prostą wyznaczoną przez $v$ oraz na płaszczyznę $\Pi$, zaś przez $S_v$ i $S_\Pi$ oznaczamy odpowiednio: symetrię osiową względem prostej wyznaczonej przez $v$ oraz symetrię względem $\Pi$.

Wyznacz macierz odwzorowania $7P_v + P_\Pi + 2S_v + 5S_\Pi$.

*Zadanie* 99. Oblicz $R_{\alpha,v}(A)$, gdzie $A = [1,2,3]^T$, zaś $R_{\alpha,v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ oznacza obrót wokół prostej wyznaczonej przez wektor $v = [2,1,2]^T$ o kąt $\alpha$ o tej własności, że $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Uwaga: są dwa takie obroty (różnią się kierunkiem obrotu); wystarczy że rozwiążesz zadanie dla jednego z nich.

*Zadanie* 100.

- Podaj przykład przekształcenia liniowego $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (to znaczy: podaj jego macierz) o tej własności, że $P$ jest symetryczne, $P([1,2,3]^T) = [1,2,3]^T$ i $P$ nie jest jednokładnością. Uzasadnij krótko, dlaczego podana przez Ciebie macierz spełnia warunki zadania.
- Podaj przykład przekształcenia liniowego $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (to znaczy: podaj jego macierz) o tej własności, że $P([1,2,3]^T) = [1,2,3]^T$ i $P$ nie jest odwracalne. Uzasadnij krótko, dlaczego podana przez Ciebie macierz spełnia warunki zadania.
- Podaj przykład przekształcenia liniowego $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (to znaczy: podaj jego macierz) o tej własności, że $P([1,2,3]^T) = [1,2,3]^T$ i $P$ nie jest diagonalizowalne. Uzasadnij krótko, dlaczego podana przez Ciebie macierz spełnia warunki zadania.

*Zadanie* 101. Podaj równanie powierzchni drugiego stopnia powstałej przez obracanie prostej o równaniu paramatrycznym $\{[1,2,3]^T + t[-1,1,2]^T : t \in \mathbb{R}\}$ wokół osi $OX$.

*Zadanie* 102. Znajdź jawny wzór na $n$-ty wyraz ciągu zadanego rekurencyjnie: $a_0 = 4$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1}$ dla $n \geq 1$.

## Egzamin poprawkowy z algebry liniowej B1, 27 lutego 2004

*Zadanie* 103. Prostokątny układ współrzędnych $x', y'$ na płaszczyźnie spełnia warunki:

a) Jego początkiem jest punkt $\binom{2}{-3}$

b) Punkt $\binom{-1}{4}$ leży na dodatniej półosi $OX'$.

c) Punkt $\binom{16}{3}$ leży na ujemnej półosi $OY'$.

Wyraź współrzędne $x', y'$ przez współrzędne $x, y$.

*Zadanie* 104. Znajdź jawny wzór na $n$-ty wyraz ciągu zadanego rekurencyjnie przez $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_{n-1} + a_n$.

*Zadanie* 105. Spośród następujących pięciu punktów: $(-1,1,2)^\top$, $(0,1,3)^\top$, $(1,0,5)^\top$, $(-3,4,3)^\top$, $(5,-4,7)^\top$; pewne cztery leżą w płaszczyźnie. Które?

*Zadanie* 106. Podaj przykład wielomianu stopnia 5 o współczynnikach rzeczywistych, takiego że $1 + 2i$ oraz $-3 + i$ są jego pierwiastkami.

*Zadanie* 107. Podaj przykład hiperboloidy $H$ i przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, takich że przeciwobraz $H$ przez $F$ jest prostą. (Napisz równanie $H$ i macierz $F$; uzasadnij żądaną własność.)

*Zadanie* 108. Niech $F$ będzie symetrycznym przekształceniem liniowym $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}^2$, spełniającym warunek: $\forall v \in \mathbb{R}^2$, $\langle F(v), v\rangle = -\|v\|^2$. Uzasadnij, że $F = -\mathrm{Id}$.

*Zadanie* 109. Niech $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, zaś $Y \in \mathbb{R}^3$. Załóżmy, że układ $AX = Y$ ma jedyne rozwiązanie. Udowodnij, że $\det(A) \neq 0$.

*Zadanie* 110. Wiadomo, że $A \circ B$ jest symetrią względem prostej przechodzącej przez 0, zaś $m(A) = \begin{bmatrix} 0,25 & -0,75 \\ 0,75 & 0,25 \end{bmatrix}$. Oblicz wartości własne przekształcenia $B$.

## Egzamin poprawkowy z algebry liniowej, 27 lutego 2006

*Zadanie* 111. Wiedząc, że liczba $3-i\sqrt{15}$ jest pierwiastkiem wielomianu $2x^4-x^3-13x^2+234x+120$, wyznacz wszystkie pierwiastki wymierne tego wielomianu.

*Zadanie* 112. Czy powierzchnia $2x^2+2xy+4yz-2z^2=1$ jest elipsoidą, hiperboloidą jednopowłokową czy hiperboloidą dwupowłokową? Precyzyjnie uzasadnij odpowiedź.

*Zadanie* 113. Niech płaszczyzna $\pi$ będzie zadana równaniem $x=2$, zaś płaszczyzna $\pi'$ równaniem $x+y+1=1$. Znajdź sinus kąta między płaszczyznami $F_A[\pi]$, $F_A[\pi']$, dla

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

*Zadanie* 114. Sprawdź, że przekształcenie płaszczyzny $\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$ (gdzie $\left[\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right]$ utożsamiamy z $x+iy$) zadane zespolonym wzorem $P(z)=-i(\overline{z}+3)$ jest izometrią. Znajdź wektor $U\in\mathbb{R}^2$ i macierz $m(F)\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ izometrii liniowej $F$, takie że $P=T_U\circ F$.

*Zadanie* 115. Niech $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -8 & -1 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix}$. Podaj przykład macierzy $B\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, takiej że $\ker F_B=\mathrm{Im}F_A$ a $\mathrm{Im}F_B=\ker F_A$.

*Zadanie* 116. O symetrycznej macierzy $M\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ wiadomo, że: $M[1,2,1]^T=[2,4,2]^T$, $M[1,1,2]^T=[2,2,4]^T$, $\mathrm{tr}(M)=5$. Wyznacz $M[0,1,0]^T$.

*Zadanie* 117. Załóżmy, że $(2-x)(1+x)^2$ jest wielomianem charakterystycznym niediagonalizowalnej macierzy $A\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Uzasadnij, że przynajmniej jeden wyraz macierzy $(A+I)(A-2I)$ jest różny od zera.

## Egzamin z algebry liniowej B1—zadania na ocenę celującą, 30 stycznia 2007

*Zadanie* 118. Hiperboloida $H$ ma równanie $x^2+y^2-z^2=1$, a przekształcenie liniowe $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ma tę własność, że $F(H)=H$. Czy wynika stąd, że $\det F\in\{-1,1\}$?

*Zadanie* 119. Udowodnij, że dla dowolnych rzeczywistych $x_1,x_2,x_3$ wyznacznik macierzy $(a_{ij})_{1\le i,j\le 3}$, gdzie $a_{ij}=\cos(x_i-x_j)$ jest nieujemny.

*Zadanie* 120. Ile można umieścić wektorów w $\mathbb{R}^3$, tak aby kąt miedzy każdymi dwoma był rozwarty?

*Zadanie* 121. Macierze $S,T\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ są symetryczne i ich wszystkie wartości własne są dodatnie. Udowodnij, że wszystkie wartości własne macierzy $ST$ są rzeczywiste i dodatnie.

*Zadanie* 122. Liczby $a,b,c,d,e,f$ są rzeczywiste. Wartości własne macierzy $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ b & d & e\\ c & e & f\end{bmatrix}$ są równe $\alpha\le\beta\le\gamma$, a wartości własne jej lewego górnego rogu $B=\begin{bmatrix}a & b\\ b & d\end{bmatrix}$ są równe $\lambda\le\mu$. Udowodnij, że $\alpha\le\lambda\le\beta\le\mu\le\gamma$.

## Bardzo trudny egzamin zerowy z algebry liniowej, 27 stycznia 2006 + kolekcja zadań nie wiadomo skąd

*Zadanie* 123. Niech $P(x,y)=0$ i $Q(x,y)=0$ będą dwoma nieproporcjonalnymi równaniami stopnia 2 zadającymi krzywe puste. Uzasadnij, że istnieją niezerowe stałe $a,b$, takie że równanie $aP(x,y)+bQ(x,y)=0$ zadaje krzywą niepustą.

*Zadanie* 124. Niech $A, B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Załóżmy, że $\det(A + kI) = \det(B + kI)$ dla $k = 1, 2, 3$. Udowodnij, że $\det A = \det B$.

*Zadanie* 125.

a) Oblicz $(a + bi)(c + di)$.

b) Zapisz $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ jako sumę dwóch kwadratów.

c) Udowodnij, że jeśli $P$ jest wielomianem rzeczywistym przyjmującym (dla rzeczywistych argumentów) tylko wartości dodatnie, to istnieją wielomiany rzeczywiste $Q, R$ takie że $P(x) = Q(x)^2 + R(x)^2$.

*Zadanie* 126. Uzasadnij, że jeśli $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ma 3 różne rzeczywiste wartości własne, a $BA = AB$, to $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna.

*Zadanie* 127. Znajdź funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, taką że $f'' + 6f' + 9f = 0$, $f(0) = 2$, $f'(0) = 0$.

*Zadanie* 128. Niech elipsoida $E$ będzie obrazem elipsoidy $2x^2+3y^2+4z^2 = 1$ przez przekształcenie liniowe o macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Oblicz iloczyn długości półosi elipsoidy $E$.

*Zadanie* 129. Niech $\ell_1, \ldots, \ell_7$ będą prostymi w $\mathbb{R}^3$ (niekoniecznie przechodzącymi przez 0). Weźmy punkt $P \in \mathbb{R}^3$ i rozpatrzmy ciąg $(P_n)$ zdefiniowany tak: $P_0 = P$, $P_{n+1}$ to rzut $P_n$ na prostą $\ell_{n+1}$ (proste liczymy w kółko, tzn. $\ell_8 = \ell_1, \ell_9 = \ell_2, \ldots, \ell_{15} = \ell_1, \ldots$). Uzasadnij, że ciąg $(\|P_n\|)$ jest ograniczony.

*Zadanie* 130. Niech $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym zachowującym pola równoległoboków (tzn. dla dowolnych wektorów $X, Y \in \mathbb{R}^3$ pole równoległoboku rozpiętego przez $X, Y$ jest równe polu równoległoboku rozpiętego przez $F(X), F(Y)$). Udowodnij, że $F$ jest izometrią.

*Zadanie* 131. Załóżmy, że $M, N \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ są symetryczne i że wszystkie ich wartości własne są dodatnie. Udowodnij, że wszystkie wartości własne macierzy $M + N$ są dodatnie.

*Zadanie* 132. Załóżmy, że

i) $p, q, r, s, w, z$ są liczbami całkowitymi dodatnimi;

ii) ułamki $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$, $\frac{w}{z}$ są nieskracalne;

iii) $\frac{p}{q} < \frac{r}{s} < \frac{w}{z}$;

iv) $wq - pz = 1$.

Udowodnij, że $s \geq q + z$.

*Zadanie* 133. Niech $S$ będzie skończonym zbiorem izometrii $\mathbb{R}^3$ (niekoniecznie liniowych), takim że (a) $Id \in S$, (b) $f, g \in S \Rightarrow f \circ g \in S$. Udowodnij, że

i) dla każdego $f \in S$ funkcja $S \ni g \mapsto f \circ g \in S$ jest bijekcją;

ii) Istnieje $v \in \mathbb{R}^3$ takie że dla każdego $f \in S$ mamy $f(v) = v$.

*Zadanie* 134. Niech $\ell_1, \ldots, \ell_k$ będą prostymi w $\mathbb{R}^2$ (niekoniecznie przechodzącymi przez 0). Weźmy punkt $P \in \mathbb{R}^2$ i rozpatrzmy ciąg $P_n$ zdefiniowany tak: $P_0 = P$, $P_{n+1}$ to odbicie symetryczne $P_n$ względem prostej $\ell_{n+1}$ (proste liczymy w kółko, tzn. $\ell_{k+1} = \ell_1, \ell_{k+2} = \ell_2, \ldots, \ell_{2k+1} = \ell_1, \ldots$). Uzasadnij, istnieją stałe $A, B > 0$, takie że dla każdego $n$ prawdziwa jest nierówność $\|P_n\| \leq An + B$. [Stałe $A, B$ mogą zależeć od punktu $P$.]

*Zadanie* 135. Utożsamiamy $\mathbb{R}^2$ z $\mathbb{C}$ przez $\binom{x}{y} \leftrightarrow x + iy$. Udowodnij, że każda izometria $\mathbb{R}^2$ może być zapisana wzorem postaci $z \mapsto az + b$ lub postaci $z \mapsto a\overline{z} + b$, gdzie $a, b$ są liczbami zespolonymi, przy czym $|a| = 1$.

*Zadanie* 136. Załóżmy, że $M \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ ma następującą własność: $\operatorname{tr} M = \operatorname{tr} M^2 = \operatorname{tr} M^3 = 0$. Udowodnij, że $M^5 = 0$.

*Zadanie* 137. Załóżmy, że $F$ jest liniowym przekształceniem $\mathbb{R}^3$, takim że $F[\mathbb{Z}^3] = \mathbb{Z}^3$. Udowodnij, że $\det F = \pm 1$.

*Zadanie* 138. Niech $R, S, T$ oznaczają obroty o $\frac{\pi}{2}$ wokół trzech osi standardowego układu współrzędnych w $\mathbb{R}^3$. Niech $G$ będzie zbiorem wszystkich przekształceń liniowych $\mathbb{R}^3$ które można otrzymać przez wielokrotne składanie ze sobą obrotów $R, S, T$ (w dowolnej kolejności, używając każdego z nich dowolną ilość razy). Czy $G$ jest nieskończony?

*Zadanie* 139. Niech $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ będą trzema różnymi płaszczyznami w $\mathbb{R}^3$ przechodzącymi przez 0; niech $\ell_1 = \pi_2 \cap \pi_3$, $\ell_2 = \pi_3 \cap \pi_1$, $\ell_3 = \pi_1 \cap \pi_2$. Udowodnij, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, taka że jeśli kąt między każdą parą $\pi_i, \pi_j$ różni się od $\frac{\pi}{2}$ o mniej niż $\delta$, to kąt między dowolną parą prostych $\ell_i, \ell_j$ różni się od $\frac{\pi}{2}$ o mniej niż $\epsilon$. [Innymi słowy, pokaż że jeśli kąty trójkąta sferycznego są równe prawie $\frac{\pi}{2}$, to jego boki mają długości prawie $\frac{\pi}{2}$.]

*Zadanie* 140. Podaj przykład macierzy której wielomian charakterystyczny to $x^2 - 12x + 36$, a wszystkie wektory własne są postaci $t\binom{2}{-3}$, $t \in \mathbb{R}$.

*Zadanie* 141. Czy można wierzchołki sześcianu zrzutować prostopadle na pewną prostą, tak aby ich rzuty podzieliły tą prostą na siedem odcinków równej długości i dwie półproste?

*Zadanie* 142. Niech $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją dwuliniową i antysymetryczną. Wykaż, że istnieje taki wektor $A \in \mathbb{R}^3$, że $\Phi(X, Y) = \langle X \times Y, A\rangle$.

*Zadanie* 143. Niech $F$ będzie liniową izometrią $\mathbb{R}^3$. Udowodnij, że

$$(\forall X \in \mathbb{R}^3)(\forall \epsilon > 0)(\exists n > 0)(\|F^n(X) - X\| < \epsilon).$$

*Zadanie* 144. Udowodnij, że dla dowolnej elipsoidy istnieje płaszczyzna, taka że ich przekrój jest okręgiem.

*Zadanie* 145.

(i) Podaj przykład macierzy $M \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$, takiej że $MM^\top \neq M^\top M$.

(ii) Wskaż błąd w następującym dowodzie faktu, że wzór

$$MM^\top = M^\top M \tag{$*$}$$

zachodzi dla dowolnej macierzy:

a) Macierze symetryczne spełniają wzór $(*)$.

b) Macierze izometrii spełniają wzór $(*)$.

c) Każda macierz jest iloczynem pewnej macierzy symetrycznej i pewnej macierzy izometrii.

d) Jeśli dwie macierze spełniają wzór $(*)$, to ich iloczyn też spełnia ten wzór.

e) Zatem każda macierz spełnia wzór $(*)$.

*Zadanie* 146. Udowodnij, że istnieje nieskończony podzbiór $\mathbb{R}^3$ którego dowolne 3 elementy są lnz.

*Zadanie* 147. Niech $F$ i $G$ będą liniowymi izometriami $\mathbb{R}^3$, takimi że $\det F \neq \det G$. Uzasadnij, że $\det(F+G) = \det F + \det G$.

*Zadanie* 148. Niech $Q(x,y,z)^T = x^2+y^2-z^2$. Pokaż, że nie istnieje liniowy układ współrzędnych $x', y', z'$ na $\mathbb{R}^3$, w którym $Q$ byłaby zadana wzorem $(x')^2 - (y')^2 - (z')^2$.

*Zadanie* 149. Załóżmy, że $M$ jest macierzą $2 \times 2$ o wyrazach całkowitych, taką że $M^N = I$ dla pewnego całkowitego $N > 0$. Udowodnij, że $M^{12} = I$.

*Zadanie* 150. Niech $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{150}$ będą formami kwadratowymi na $\mathbb{R}^2$. Udowodnij, że

$$[(\forall U \in \mathbb{R}^2)(\exists i,j)(i \neq j \wedge |Q_i(U) - Q_j(U)| < 1000)] \Rightarrow [(\exists i,j)(i \neq j \wedge Q_i = Q_j)].$$

*Zadanie* 151. Wiadomo, że $A \circ B$ jest symetrią względem prostej przechodzącej przez 0, zaś $m(A) = \begin{bmatrix} 0,25 & -0,75 \\ 0,75 & 0,25 \end{bmatrix}$. Oblicz wartości własne przekształcenia $B$.

*Zadanie* 152. Napisz macierze $2 \times 2$: $A$ – obrotu przeciwzegarowego o $\frac{2\pi}{3}$; $B$ – odbicia względem osi $OY$. Niech $G = \{M : (\exists n \geq 0)(\exists M_1, \ldots, M_n \in \{A, B\})(M = M_1 \ldots M_n)\}$. Znajdź wszystkie elementy zbioru $G$.