

Interpretacja geometryczna wyznacznika

Wyznacznik przekształcenia liniowego
definiujemy wzorem
 $\det F := \det m(F)$.

Fakt. Niech $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie liniowe.

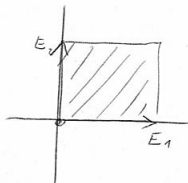
Wówczas $|\det F|$ - to skala, z jaką F zmienia
pole, tzn.

$$(\text{pole } F(Z)) = |\det F| \cdot (\text{pole } Z).$$

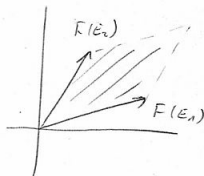
↑
„wielkość” obszaru $\mathbb{R}^2$

Dowód.

Dla tego konwencji to jest prawdziwe:

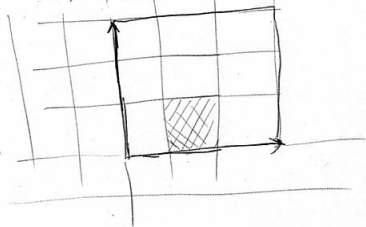


pole = 1



$$\begin{aligned} \text{pole} &= |\det (F(E_1), F(E_2))| = \\ &= |\det (m(F))| = \\ &= |\det F|. \end{aligned}$$

Dla tej przekształcamy na mniejsze kwadraty.

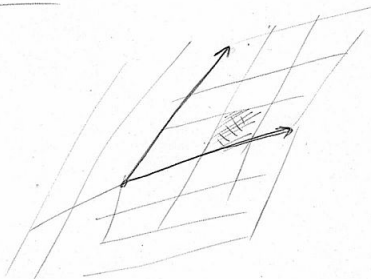


$$\text{pole} =$$

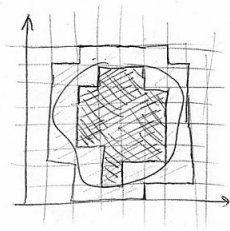
$$= \frac{1}{9}$$

Dla trójkątów kwadraty to
też jest prosta...

(?)



$$\text{pole} = \frac{1}{9} |\det \mathbf{F}|$$



Bardziej skomplikowane figury
przybliżamy przy pomocy
mających kwadratów!

O szczegóły pytać na
analizie / teorii miary

~~Skonkretyzujmy, jak obliczyć~~
~~kwadraty 30x100~~

Printed

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ real symmetric $\Leftrightarrow \det ab = \pm 1$



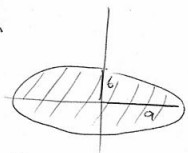
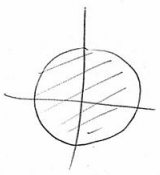
Printed

$a, b > 0$

$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

Ellipse oriented
a, b



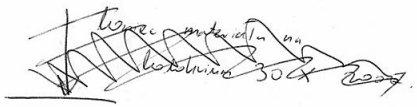
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x' = ax \\ y' = by \end{matrix}$

$\left\{ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} : \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} \leq 1 \right\} =$
 $= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$

$\text{Pole} = \pi$

$\text{Pole} = \pi$

$\pi \cdot |\det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}| =$
 $= \pi |ab| = \pi ab$



A o czym mowi zwiazek wyznaczajacy F ?

(4)

Fakt Jeśli F - przekształcenie liniowe $\mathbb{R}^2$ sprzeczne

• $\det F > 0$, to

" F zachowuje orientację"

$$\begin{cases} (U, V) \oplus \text{orientacja} \Rightarrow (F(U), F(V)) \oplus \text{orientacja} \\ (U, V) \ominus \text{orientacja} \Rightarrow (F(U), F(V)) \ominus \text{orientacja} \end{cases}$$

• $\det F < 0$ to

" F zmienia orientację"

$$\begin{cases} (U, V) \oplus \text{orientacja} \Rightarrow (F(U), F(V)) \ominus \text{orientacja} \\ (U, V) \ominus \text{orientacja} \Rightarrow (F(U), F(V)) \oplus \text{orientacja} \end{cases}$$

Dowód.

$$\det(F(U), F(V)) = \det(m(F) \cdot (U, V)) =$$

$$= \det m(F) \cdot \det(U, V) =$$

$$= \det F \cdot \det(U, V).$$

Przykład

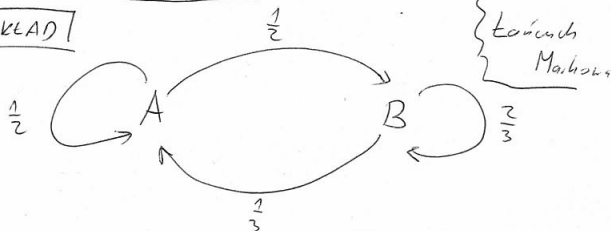
$F = S_x$ zmienia orientację.

☐
Korzystając z
definicji 30 X. 2007.

Welttag i. Kantoli Itäme

(5)

PR2YKLAD



np.

$A = \text{"dus jst itäme"}$

$B = \text{"dus paka itäme"}$

"Jelis dus jst itäme, to
jutos 2 probaprobabilistien
 $\frac{1}{2}$ bista itäme, q 2
probap. $\frac{1}{2}$ bista itäme."

Markovian me 19
lymagene na holdum/
esamine

n	0	1	2	3
p_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$	...
q_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$	...

itd



"w dnu 0

2 paka 1 jst itäme."

$p_{100} = ?$

$q_{100} = ?$

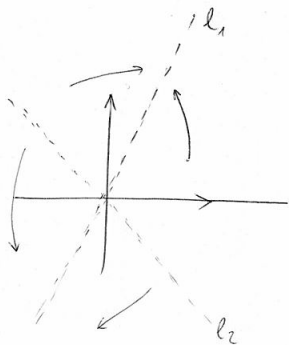
(6)

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{3} q_n \\ \frac{1}{2} p_n + \frac{2}{3} q_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_{100} \\ q_{100} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_{99} \\ q_{99} \end{pmatrix} = A \cdot A \begin{pmatrix} p_{98} \\ q_{98} \end{pmatrix} \dots = \underbrace{A^{100}}_{\uparrow} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$$

$$A^{100} = ?$$



szukaj takie dwie

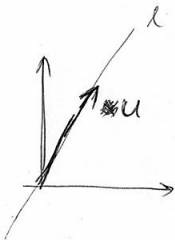
specjalne proste, t.j.

$$F_A(l_1) \subseteq l_1$$

$$F_A(l_2) \subseteq l_2$$

One bardzo mądry pomysł.

(7)



Substancja prostej l takiego, że

$$F_A(l) \subseteq l.$$

Jeżeli prosta l jest ~~nie~~ parametryzowana

ma równanie parametryczne $X = tU, U \neq 0$
to substancja U takiego, że

$$AU \in l \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad AU = \lambda U$$

$$U = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = \lambda x \\ \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = \lambda y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\frac{1}{2} - \lambda)x + \frac{1}{3}y = 0 \\ (\frac{1}{2} - \lambda)x + (\frac{2}{3} - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)\lambda + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} &= 0 \\ \lambda^2 - \frac{7}{6}\lambda + \frac{1}{6} &= 0 \end{aligned}$$

insider tip:

λ nazywamy
własnością własną
macierzy A

U - wektor
własny macierzy A

ten trik zawsze ma
niektóre zastosowanie
dotychczas widzieliśmy, gdy
jako wyznacznik słowem
żegnaj.

$$(A-1)(x-\frac{1}{6})=0$$

(8)

Są dwie wartości
właściwe, 2 bazy
jest stoniarung
wektor własny.

$$\lambda=1$$

$$\lambda=\frac{1}{6}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}y$$

many niezależne wektory, interesuje mnie dowolne niezerowe wektory.

$$N_p \quad U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$AU = 1 \cdot U$$

$$F_A(U) = 1 \cdot U$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$$

$$x = -y$$

$$N_p \quad V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

wektory

niezależne wektory i U.

$$AV = \frac{1}{6}V$$

$$F_A(V) = \frac{1}{6}V$$

Proste $\mathbb{L}U$ i $\mathbb{L}V$ są rozłożone przez F_A .

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$2a + b = 1$$

$$3a - b = 0 \Rightarrow b = 3a$$

$$a = \frac{1}{5}$$

$$b = \frac{3}{5}$$

zapisz $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = m_1$ wektor

jako kombinacja liniowa

$$U; V =$$

= wektory własne

Dla czego wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są takie istotne?

9

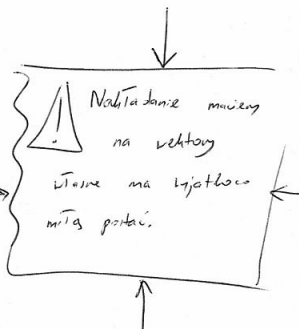
$$\begin{pmatrix} p_{100} \\ q_{100} \end{pmatrix} = A^{100} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^{100} (a \vec{u} + b \vec{v}) =$$

$$= a \underbrace{A^{100} \vec{u}}_{1.1 \dots 1.1} + b \underbrace{A^{100} \vec{v}}_{\frac{1}{6} \dots \frac{1}{6} V} =$$

to

$$= a 1^{100} \vec{u} + b \frac{1}{6^{100}} \vec{v} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3}{5 \cdot 6^{100}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



KONIEC PRZYKŁADU

Def. • (nierówny)* wektor $u \in \mathbb{R}^2$

nazywamy wektorem własnym

macierzy A (co. przekształcenia liniowego F)

jeżeli $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ takie, że $Au = \lambda u$

(co. $F(u) = \lambda u$).

Wtedy liczba λ nazywamy wartością własną macierzy A (co. przekształcenia F).

• Jeżeli $\lambda \in \mathbb{R}$ ma tę własność, że $\exists u \in \mathbb{R}^2$,

$u \neq \vec{0}$ oraz $Au = \lambda u$ (co. $F(u) = \lambda u$)

to λ nazywamy wartością własną macierzy A (co. przekształcenia F).

• Wielomian charakterystyczny macierzy A to $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\det(A - xI) = \det \begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix} = x^2 - \underbrace{(a+d)}_{\text{tr } A} x + \underbrace{ad-bc}_{\det A}$$

4. • $\text{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a+d$ nazywamy SLADEM macierzy $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

• dodawanie macierzy definiujemy

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

(10)

*
niektóre ~~we~~
wartości, że
 $\vec{0}$ też jest
wektorem własnym.
Nie błądz, to
kłamstwo.

$$\left\{ \begin{matrix} t. \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta & tb \\ tc & td \end{pmatrix} \end{matrix} \right.$$

(11)

Uwaga! Czy $\vec{0}$ jest wektorem własnym?

W zależności od potrzeb.

Fakt

λ jest wartościową własną macierzy $A^{(*)}$



λ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego macierzy A .

(*)

do indukcji:

... lub przekształcenia

liniowego F ...

Definicja

λ jest wartościową własną $\Leftrightarrow$

$$\exists u \neq \vec{0} \quad Au = \lambda u \Leftrightarrow$$

$$\exists u \neq \vec{0} \quad (A - \lambda I)u = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{mógł:} \\ u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ układ równań o zeroznych prawych stronach:

macierzy główny $A - \lambda I$ ma niezerowe rozwiązanie $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow$$

λ jest pierwiastkiem $\det(A - xI)$.

(12)

Wniosek. Macierz 2×2 ma najwyżej 2 wartości własne

(bo p. wielomian charakterystyczny jest stopnia 2)

Fakt Jeśli $\lambda_1 \neq \lambda_2$ to wartości własne A to odpowiadające im nieliczne wektory własne u_1, u_2 są l.n.z.

Dowod Gdyby $u_1 = c u_2$, to

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 &= A u_1 = A c u_2 = c A u_2 = c \lambda_2 u_2 = \\ &= \lambda_2 c u_2 = \lambda_2 u_1 \end{aligned}$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) u_1 = 0 \quad \downarrow$$

Twierdzenie Jeśli u_1, u_2 to l.n.z. wektory własne A odpowiadające wartościom własnym λ_1, λ_2 , to

$$(*) \quad \boxed{A = P D P^{-1}} \text{ gdzie}$$

$$P = [u_1, u_2] \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Przykład.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}}$$

$$A^n = (P D \cancel{P^{-1}}) (\cancel{P} D \cancel{P^{-1}}) \dots (P D P^{-1}) =$$

$$= P D^n P^{-1} \quad \left| \quad D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \right|$$

Dowód

Polećmy lewą i prawą stronę (*) na u_1 i u_2 .

$$P E_1 = u_1$$

$$P E_2 = u_2$$



$$E_1 = P^{-1} u_1$$

$$E_2 = P^{-1} u_2$$

$$L = A u_1 = \lambda_1 u_1$$

$$P = P D P^{-1} u_1 =$$

$$= P D E_1 =$$

$$= P \lambda_1 E_1 = \lambda_1 P E_1 =$$

$$= \lambda_1 u_1.$$

$$\boxed{L = P.}$$

v.

na u_2 analogicznie.Jeżeli u_1 i u_2 są linie oraz M, N są p. liniowymi, to:

$$M u_1 = N u_1$$

$$M u_2 = N u_2$$

$$\Rightarrow M = N$$

□

(14)

Macierz postaci $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$ nazywamy
macierzą diagonalną.

Macierz A jest diagonalizowalna, jeżeli istnieje macierz:

P (która musi być odwracalna) i D (musi być diagonalna)

takie, że

$$A = P D P^{-1}.$$

Niech U, V będą lnz. Dowodząc $X \in \mathbb{R}^2$ można jednostanowo zapisać w postaci $X = u U + v V$. Funkcje $X \mapsto u = u(X)$, $X \mapsto v = v(X)$ zdefiniują nowy („liniowy”) układ współrzędnych na $\mathbb{R}^2$.

Żeby się nie myliło: przez linia nierzeczywistych staramy się wyznaczyć funkcje konwencji: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ to zwykłe współrzędne, $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ to nowe współrzędne.

Jeżeli U, V — lnz wektorów własnych A , to

$$\begin{aligned} F \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= F(uU + vV) = \lambda_1 u U + \lambda_2 v V = \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 u \\ \lambda_2 v \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zatem F w nowych współrzędnych zapisuje się macierzą diagonalną $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

(15)

Nowe współrzędne związane są ze starymi:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u U + v V = (U, V) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\boxed{P = (U, V)}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$\downarrow$ przekształcenie F w nowych współrzędnych
 $\uparrow$ powrót z nowych do starych
 $\uparrow$ powrót z nowych do starych

macierz przekształcenia

F w starych

współrzędnych