

Algebra liniowa 1R, Lista 4

1. Uzasadnij równości: $M(N + P) = MN + MP$, $(M + N)P = MP + NP$, $t(MN) = (tM)N = M(tN)$, $\det(M^{-1}NM) = \det(N)$, $\det(tM) = t^2 \det(M)$, $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$, $\text{tr}(M + N) = \text{tr}(M) + \text{tr}(N)$, $\text{tr}(M^{-1}NM) = \text{tr}(N)$ (M, N, P są macierzami, $t \in \mathbf{R}$).
 2. Dla jakich wartości parametru c macierz $\begin{pmatrix} 2 & c \\ -c & 1 \end{pmatrix}$ ma (a) zero, (b) jedną, (c) dwie wartości własne.
 3. Znajdź wielomian charakterystyczny, wartości własne i wektory własne macierzy
(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
 4. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Oblicz A^2 , A^3 i A^4 . Sformułuj narzucającą się hipotezę, a następnie udowodnij ją indukcyjnie.
-
5. Sprawdź, że jedyną wartością własną macierzy $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ jest 5. To samo zrób dla macierzy $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Sprawdź, że jedna z tych macierzy diagonalizuje się, a druga nie.
 6. Przedstaw macierz $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ w postaci PDP^{-1} , gdzie D jest macierzą diagonalną. Zastosuj tę postać do obliczenia 6-tej potęgi macierzy M .
 7. Znajdź macierz przekształcenia liniowego, dla którego $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ jest wektorem własnym o wartości własnej $-\frac{1}{2}$, zaś $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ jest wektorem własnym o wartości własnej 1.
 8. Podaj przykład liniowego przekształcenia płaszczyzny, które zachowuje pole, zmienia orientację i ma wartość własną π .
 9. Które z poniższych przekształceń diagonalizują się? Dla tych które diagonalizują się, znajdź wartości własne oraz bazę wektorów własnych. (Wsk.: Rozwiązuj to zadanie geometrycznie, bez odwoływania się do macierzy)
(a) R_θ , (b) S_ℓ (ℓ – pewna prosta przechodząca przez O), (c) J_r , (d) P_U .
 10. Napisz warunek na liczby a, b, c, d gwarantujący, że macierz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ma dwie różne wartości własne.
 11. Niech $A = PMP^{-1}$. Uzasadnij, że wielomiany charakterystyczne macierzy A oraz M są równe (wsk.: można to zrobić odwołując się do wzorów z ćwiczenia 1). Wywnioskuj, że jeśli macierz M ma dwie różne wartości własne λ, μ , to $\det(M) = \lambda\mu$, $\text{tr}(M) = \lambda + \mu$. Czy założenie $\lambda \neq \mu$ jest istotne?
 12. Załóżmy, że przekształcenie liniowe E spełnia warunek $E \circ E = E$. Jakie wartości własne może mieć to przekształcenie? Czy koniecznie musi być przekształceniem zerowym lub identycznościowym?
 13. Uzasadnij, że jeśli $A = PDP^{-1}$ (gdzie D jest diagonalna), to kolumny P są wektorami własnymi A .
 14. Załóżmy, że wektory $U, W \in \mathbf{R}^2$ są lnz, zaś macierz A spełnia warunki $AU = 5U + 4W$, $AW = 3U + 2W$. Udowodnij, że istnieje odwracalna macierz P , taka że $A = P \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$. Uogólnij.
-
15. Załóżmy, że $\det(F - x \cdot Id)$ ma podwójny pierwiastek λ , mimo że F nie jest jednokładnością. Udowodnij, że istnieją liniowo niezależne wektory U, W , takie że $F(U) = \lambda U$, $F(W) = U + \lambda W$. Czy macierz F diagonalizuje się? Jeśli nie, to czy potrafisz wskazać dla niej jakiś substytut diagonalizacji? (Wsk. zad. 14)
 16. Udowodnij prawdziwość zdania $(\forall A \in M_{2 \times 2}(\mathbf{R}))((\exists \lambda, \mu \in \mathbf{R})(\exists P \in M_{2 \times 2}(\mathbf{R}))(A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}) \iff ((\exists \lambda \in \mathbf{R})(A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}) \vee (\exists a, b \in \mathbf{R})(a \neq b \wedge \det(A - aI) = 0 \wedge \det(A - bI) = 0)))$.
 17. Niech $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, zaś U niech będzie dowolnym wektorem. Zbadaj jak szybko rośnie długość wektora $M^n U$ gdy n dąży do nieskończoności. (Uzasadnij, że istnieje stała C zależna (jak?) od wektora U , taka że granica $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|M^n U\|}{C^n}$ jest liczbą dodatnią.)
 18. Przekształcenie liniowe F ma macierz $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Wyznacz macierz opisującą działanie tego przekształcenia we współrzędnych związanych z bazą $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.
 19. Niech F będzie liniowym przekształceniem płaszczyzny, takim że $\det F = 2$. Udowodnij, że istnieje wektor $U \in \mathbf{R}^2$, taki że $\|U\| = 1$, $\|F^{20}(U)\| > 1000$.