

Algebra liniowa 1R, Lista 6

1. Sprawdź, że $(AB)^\top = B^\top A^\top$, $(A^\top)^\top = A$, $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}$, $\text{tr}(A^\top) = \text{tr}(A)$, $\det(A^\top) = \det(A)$.
2. Udowodnij, że $\langle A^\top X, Y \rangle = \langle X, AY \rangle$.
3. Zdiagonalizuj jak w twierdzeniu spektralnym następujące macierze symetryczne (postaraj się minimalizować ilość rachunków):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Rozpoznaj następujące krzywe stopnia 2 sprowadzając ich równania do możliwie prostej postaci: (a) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 18y + 28 = 0$, (b) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 18y + 29 = 0$, (c) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 18y + 30 = 0$, (d) $x^2 - 5y^2 - 4x - 50y - 123 = 0$, (e) $x^2 - 5y^2 - 4x - 50y - 121 = 0$, (f) $-y^2 - 7x + 8y - 21 = 0$, (g) $-y^2 + 8y - 21 = 0$, (h) $-y^2 + 8y - 16 = 0$, (i) $-y^2 + 8y - 11 = 0$.
 5. Wzory $x' = x + y$, $y' = x - 2y$ zadają liniowy, ale nieprostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie.
 - a) wskaż dwa punkty $P_1 = \begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{bmatrix}$, takie że $d(P_1, P_2) \neq \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2}$.
 - b) wskaż dwa wektory $U_1 = \begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix}$, $U_2 = \begin{bmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{bmatrix}$, takie że $\langle U_1, U_2 \rangle \neq x'_1 x'_2 + y'_1 y'_2$.
-
6. Uzasadnij, że w prostokątnym liniowym układzie współrzędnych we wzorach z poprzedniego zadania zachodzą równości.
 7. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ będzie macierzą przekształcenia liniowego F , jak również macierzą formy kwadratowej Q (w standardowym układzie współrzędnych). Wprowadźmy nowy liniowy układ współrzędnych wzorami $x' = 2x + y$, $y' = x + 2y$. Znajdź macierz F i macierz Q w tym nowym układzie współrzędnych.
 8. Podaj przykład równania stopnia 2 postaci $ax^2 + 2bxy + cy^2 = d$ opisującego (a) parę prostych przecinających się w punkcie $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; (b) parę prostych równoległych do wektora $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; (c) okrąg przechodzący przez punkt $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; (d) $\emptyset$; (f) hiperbolę przechodzącą przez $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, taką że kąt między jej asymptotami wynosi $\pi/3$.
 9. Dana jest krzywa $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$. Napisz jej równanie w układzie współrzędnych powstałym ze standardowego przez obrót o kąt $\pi/4$ (wszystko jedno w którą stronę) i rozstrzygnij co to za krzywa.
 10. Znajdź kanoniczne równania poniższych krzywych diagonalizując stosowną macierz symetryczną (lub inaczej). Następnie znajdź wektory własne tej macierzy i prostokątny układ współrzędnych w którym równanie staje się kanoniczne. Rozpoznaj i naszkicuj krzywą (na tle oryginalnych współrzędnych).
 - (a) $x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0$, (b) $4x^2 + 2\sqrt{2}xy + 3y^2 = 1$,
 11. Zbadaj i naszkicuj krzywe (używając strategii z poprzedniego zadania lub inaczej):
 - (c) $x^2 - 2xy + y^2 = 1$, (d) $x^2 - 3y^2 = 0$, (e) $x^2 + 2xy + y^2 = 0$, (f) $x^2 + xy + y^2 = 0$.
 12. W zależności od wartości liczb λ , μ , stwierdź czym jest zbiór rozwiązań równania $\lambda x^2 + \mu y^2 = 0$.
 13. Rozważmy równanie $ax^2 + 2bxy + cy^2 = h$. Ma ono postać kanoniczną $\lambda(x')^2 + \mu(y')^2 = 1$ lub $\lambda(x')^2 + \mu(y')^2 = 0$ w pewnym prostokątnym układzie współrzędnych. Rozpatrując znaki liczb $ac - b^2$, a , h można sporo powiedzieć o znakach liczb λ , μ (zrób tabelkę?). Użyj tej metody by stwierdzić, czy następujące równania reprezentują elipsę, hiperbolę, prostą, parę prostych, punkt czy zbiór pusty.
 - (a) $x^2 - 3xy + y^2 = 1$, (b) $25x^2 + 10xy + y^2 = 2$, (c) $x^2 - 2xy - 2y^2 = 0$, (d) $x^2 + 4xy + y^2 = -7$, (e) $x^2 - 6xy + 9y^2 = 0$, (f) $3x^2 + 7xy - y^2 = -2$, (g) $7x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$, (h) $x^2 + xy = -3$,
 14. Niech X będzie niezerowym wektorem własnym macierzy symetrycznej S , zaś Y niech będzie niezerowym wektorem prostopadłym do X . Uzasadnij, że $SY \perp X$ i wywnioskuj, że Y jest wektorem własnym S .
 15. Załóżmy, że wartości własne macierzy symetrycznej M są dodatnie.
 - a) Uzasadnij, że dla każdego niezerowego wektora X mamy $\langle MX, X \rangle > 0$.
 - b) Udowodnij, że jeśli P jest macierzą odwracalną to wartości własne macierzy $P^\top M P$ są dodatnie.
-
16. Sprowadź do postaci kanonicznej (wraz z wyrażeniem nowych współrzędnych przez stare i starych przez nowe) krzywe: (a) $34x^2 - 24xy + 41y^2 - 20x - 140y + 125 = 0$, (b) $x^2 - 2xy + y^2 + x + y = 0$, (c) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 10x + 5y + 7 = 0$.

17. Znajdź oś symetrii obrazu paraboli $y = \sqrt{2}x^2$ przez przekształcenie o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
18. Znajdź wszystkie odwracalne przekształcenia liniowe F , takie że obrazem hiperboli $xy = 1$ przez F jest ta sama hiperbola. Które spośród znalezionych przekształceń są izometriami?
19. Niech M, N będą dwoma punktami, zaś $L > d(M, N)$. Uzasadnij, że $\{P \in \mathbf{R}^2 : d(P, M) + d(P, N) = L\}$ jest elipsą. (Wsk: Wybierz układ współrzędnych, w którym M, N leżą na osi OX , oba w tej samej odległości od O . Licz aż wyjdzie.)
20. Udowodnij, że jeśli F jest przekształceniem liniowym, to istnieją dwa niezerowe wektory U, W prostopadłe do siebie, takie że $F(U)$ i $F(W)$ są prostopadłe.