Algebra liniowa 1R, Lista 9

Na tej liście i następnych, li tylko w celu zaoszczędzenia miejsca, piszemy $(x, y, z)^\top$ zamiast $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1. Uzasadnij, że iloczyn wektorowy jest dwuliniowy i antysymetryczny.
2. Sprawdź bezpośrednim rachunkiem:
   (a) $\langle A\times B, C\rangle = \langle B\times C, A\rangle$; (b) $(A\times B) \perp A$, $(A\times B) \perp B$; (d) $A\times(B\times C)+B\times(C\times A)+C\times(A\times B) = 0$.
3. Które z wyrażeń opisują wektor, które liczbę, a które są bez sensu (A, B, C to wektory, $\lambda \in \mathbf{R}$):
   (a) $\langle C \times (\lambda B), A\rangle$; (b) $\langle C, (\lambda B)\rangle \times A$; (c) $A \times (\langle C, B\rangle B)$; (d) $\lambda\langle A, B\rangle$; (e) $\lambda(A \times B)$; (f) $\langle A, B\rangle + A \times B$; (g) $\langle A, B\rangle(A \times B)$.
4. Znajdź cosinus kąta między płaszczyznami $2x + 7y - z = 5$, $-x + y + 3z = 7$.
5. Znajdź pola równoległoboków rozpiętych przez pary wektorów
   (a) $(1, -2, 4)^\top, (-1, 2, 3)^\top$; (b) $(-1, 0, 2)^\top, (0, 1, 3)^\top$.

---

6. Udowodnij (bezpośrednim ?) rachunkiem wzór $\|A \times B\| = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \sin(\angle(A, B))$. Wsk.: podnieś do kwadratu i użyj wzorów $\langle A, B\rangle = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \cos(\angle(A, B))$, $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ by pozbyć się sinusa.
7. Uprość wyrażenia: (a) $\langle A, A \times C\rangle$; (b) $\langle A \times (B + A \times C), A\rangle$; (c) $\langle A + A \times B, A + B\rangle$;
   (d) $\langle D \times (A + D), (A \times B) \times (C \times A)\rangle$.
8. Sprawdź, które z podanych punktów leżą na płaszczyźnie $X = (1, 2, 3)^\top + t(5, -7, -2)^\top + s(-4, 3, -1)^\top$:
   $(1, 2, 3)^\top$; $(7, 4, 2)^\top$; $(-3, 4, 3)^\top$; $(-2, 3, 1)^\top$; $(5, 6, 7)^\top$; $(5, -6, 7)^\top$; $(3, -8, -5)^\top$; $(1, \pi, -\pi)^\top$; $(9, -2, 7)^\top$; $(12, 3, 16)^\top$; $(21, -12, 13)^\top$; $(11, 23, 34)^\top$; $(-3, 2, 1)^\top$; $(-1, 1, 1)^\top$; $(10, 0, 10)^\top$; $(2, 2, 2)^\top$; $(-7, 2, 5)^\top$; $(1, -1, 0)^\top$; $(3, -7, -4)^\top$; $(1, 10, 100)^\top$.
9. Zamień równanie płaszczyzny/prostej na parametryczne/nieparametryczne:
   (a) $X = (0, 0, 1)^\top + t(1, 0, 1)^\top + s(1, 2, 7)^\top$; (b) $x + 2y + 3z = 4$; (c) $X = (1, 0, 7)^\top + t(2, -1, 5)^\top$;
   (d) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+5}{-1}$.
10. Niech $P = (1, 2, 3)^\top$, niech Π będzie płaszczyzną o równaniu $4x + y - z = 2$, zaś ℓ niech będzie prostą $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{7} = \frac{z-(-2)}{3}$. Napisz nieparametryczne równanie
    (a) płaszczyzny przechodzącej przez P i równoległej do Π;
    (b) płaszczyzny przechodzącej przez P i zawierającej ℓ;
    (c) prostej przechodzącej przez P i prostopadłej do Π;
    (d) prostej przechodzącej przez P i równoległej do ℓ.
    (e) prostej przechodzącej przez P, równoległej do Π i prostopadłej do ℓ;
    (f) płaszczyzny Π' zawierającej ℓ i takiej, że kąt między Π a Π' jest równy kątowi między Π a ℓ.
11. Uzasadnij, że jeśli $A + B + C = 0$, to $A \times B = B \times C = C \times A$.
12. Znajdź cosinus kąta między płaszczyzną $y - 5z - 1 = 0$ a prostą $3x + 4y = 0$, $z = 0$.
13. Napisz równania parametryczne i nieparametryczne prostej będącej przekrojem płaszczyzn $x+y+z = 7$, $x + 2y - z = 3$.
14. Znajdź równanie nieparametryczne płaszczyzny zawierającej prostą $\frac{x-1}{3} = \frac{-1-2y}{4} = \frac{3z+9}{-6}$ i prostopadłej do płaszczyzny $-x + 4y - 2z = 100$.
15. Znajdź równanie płaszczyzny zawierającej proste $X = (1, 1, 3)^\top + t(1, -2, 1)^\top$, $\frac{1-x}{-2} = \frac{2y+2}{-8} = \frac{z+3}{2}$.
16. Znajdź równanie płaszczyzny przechodzącej przez $(2, -1, 3)^\top$, $(3, 1, 2)^\top$ i równoległej do wektora $(-3, 1, 4)^\top$.
17. Niech ℓ będzie prostą $X = (0, 3, 0)^\top + t(-1, 1, 2)^\top$. Znajdź prostą przechodzącą przez $(1, 0, 1)^\top$ i przecinającą ℓ pod kątem prostym.

---

18. Udowodnij, że proste $X = A+tB$, $X = C+tD$ zawierają się w pewnej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy gdy $\langle A, B \times D\rangle = \langle C, B \times D\rangle$. Używając tego warunku stwierdź, czy proste $X = (1, 1, 2)^\top + t(7, 1, 0)^\top$, $X = (-6, 0, 2)^\top + t(1, 0, 1)^\top$ leżą w jednej płaszczyźnie. Jeśli tak, znajdź równanie tej płaszczyzny.
19. Dwie proste w $\mathbf{R}^3$ mogą się przecinać, być równoległe, lub ani jedno ani drugie (wtedy nazywamy je skośnymi). Dla każdej z tych trzech możliwości ułóż możliwie dużo zadań pytających o kąty/punkty/płaszczyzny/proste. Podaj (możliwie nietrywialne) przykłady pary prostych (a) przecinających się, (b) równoległych, (c) skośnych. Dla tych przykładów rozwiąż ułożone przez siebie (i kolegów) zadania.

20. Udowodnij, że $(\forall A, B \in \mathbf{R}^3)(\|A\| = 1 \Rightarrow A \times B = A \times (A \times (A \times (A \times (A \times B)))))$.
21. Dla każdej ściany F pewnego wielościanu wypukłego narysowano wektor N_F prostopadły do F, skierowany na zewnątrz wielościanu (jeśli zaczepić go gdzieś w środku ściany F), o długości równej polu ściany F. Pokaż, że suma wszystkich narysowanych wektorów jest równa 0. (W razie kłopotów przelicz to zadanie dla czworościanu używając iloczynu wektorowego.)
22. Użyj tożsamości z zadania 2.(d) by pokazać, że wysokości trójkąta sferycznego przecinają się w jednym punkcie.