

Algebra liniowa 1R, Lista 12

Wszystkie macierze których rozmiar nie jest explicite określony to macierze 3×3 .

1. Uzasadnij następujące wzory. Załóż, że występujące w nich macierze odwrotne istnieją. a) $(M^{-1})^{-1} = M$; b) $\det(MNM^{-1}) = \det(N)$; c) $\det(M^{-1}) = (\det(M))^{-1}$.
2. Znajdź wektory i wartości własne dla (a) obrotu o kąt θ wokół pewnej prostej; (b) rzutu na prostą; (c) rzutu na płaszczyznę; (d) symetrii względem prostej; (e) symetrii względem płaszczyzny. (O wszystkich prostych i płaszczyznach o których mowa w tym zadaniu zakładamy, że przechodzą przez 0.)
3. Napisz co najmniej trzy macierze izometrii w których pierwszym wierszem jest $(3/5, \sqrt{7}/5, -3/5)$.
4. Podana macierz jest macierzą izometrii. Czy ta izometria jest obrotem, czy symetrią obrotową? Wokół jakiej prostej? O jaki kąt?

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Naskicuj powierzchnie: $x^2 = 0$, $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 0$, $x^2 + z^2 = 0$, $x^2 + z^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $-x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z - y^2 = 0$.

6. Niech ciąg (a_n) będzie zadany rekurencyjnie: $a_0 = 1$, $a_1 = 7$, $a_2 = -1$, $a_{n+3} = 4a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n$. Wyprowadź jawny wzór na n -ty wyraz tego ciągu.
7. Znajdź macierz izometrii liniowej F , takiej że: (a) $F((2, 2, -1)^\top) = (0, 3, 0)^\top$; (b) $F((2, 2, -1)^\top) = (1, -1, \sqrt{7})^\top$.
8. Znajdź macierz obrotu o $\frac{\pi}{6}$ wokół prostej $x = -y = \frac{z}{3}$, w którąkolwiek stronę. Następnie wytłumacz komuś w którą stronę obracałeś.
9. Znajdź macierz złożenia obrotu prawoskrętnego wokół prostej $X = t(2, 1, 2)^\top$ o kąt $\frac{\pi}{4}$ (przekształcenia $R_{(2,1,2)^\top, \frac{\pi}{4}}$) i odbicia w płaszczyźnie prostopadłej do osi tego obrotu.
10. Niech A będzie liniową izometrią $\mathbf{R}^3$ zmieniającą orientację, taką że liczba 1 jest jej wartością własną. Uzasadnij, że A jest odbiciem względem pewnej płaszczyzny.
11. Znajdź symetryczną macierz $A \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$, taką że $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, a liczba 3 jest wartością własną A .
12. Znajdź symetryczną macierz $A \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$, taką że $\chi_A(x) = 2x^2 - x^3$, a każdy wektor płaszczyzny $2x + y + z = 0$ jest wektorem własnym A .
13. Podaj przykład macierzy symetrycznej $A \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$, takiej że wektory $(1, -1, 0)^\top$, $(0, 1, -1)^\top$ i $(1, 0, -1)^\top$ są jej wektorami własnymi, a wektor $(1, 2, 3)^\top$ nie jest jej wektorem własnym.
14. Podaj przykład formy kwadratowej Q na $\mathbf{R}^3$, takiej że $Q(E_1), Q(E_2), Q(E_3) > 0$, ale dla pewnego $U \in \mathbf{R}^3$ mamy $Q(U) < 0$.
15. Wiadomo, że powierzchnia stopnia 2 zadana równaniem

$$ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2 + g = 0$$

może być elipsoidą, hiperboloidą jednopowłokową, hiperboloidą dwupowłokową, ... Uzupełnij tę listę rozważając wszystkie możliwe postacie kanoniczne powyższego równania. Uwzględnij także przypadki zdegenerowane, jak np. punkt.

16. Udowodnij, że każda zachowująca 0 izometria $\mathbf{R}^3$ jest liniowa. [Robi się to podobnie jak dla $\mathbf{R}^2$.]
17. Przedstaw elipsoidę o długościach półosi a, b, c jako obraz sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ przez odpowiednie przekształcenie liniowe $\mathbf{R}^3$. Znając wzór na objętość kuli i wiedząc jak zmienia się objętość pod wpływem przekształcenia liniowego oblicz objętość obszaru ograniczonego tą elipsoidą.
18. Oblicz objętość obszaru ograniczonego elipsoidą $x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 4yz = 1$.
19. Uzasadnij, że dla dowolnej elipsoidy istnieje płaszczyzna, taka że ich przekrój jest okręgiem.
20. Niech M będzie macierzą 2×2 o wyrazach całkowitych. Załóżmy, że $M^n = I$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n . Udowodnij, że $M^{12} = I$.