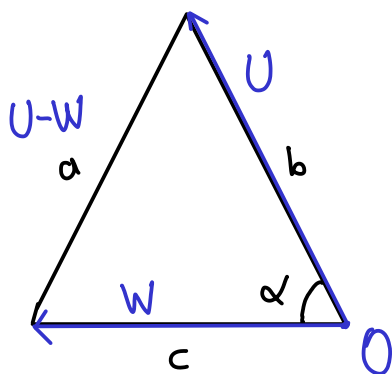


Twierdzenie.

$$\langle U, W \rangle = \|U\| \cdot \|W\| \cdot \cos \angle(U, W)$$

Wniosek. (tw. cosinusów)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$



$$\begin{aligned} a^2 &= \|U-W\|^2 = \|U\|^2 + \|W\|^2 - 2 \underbrace{\langle U, W \rangle}_{\|U\| \|W\| \cos \alpha} = \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \end{aligned}$$

Równanie ogólne prostej

$$ax + by = c$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = c$$

Fakt. Wektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ jest prostopadły do prostej $ax + by = c$.

Dowód.

Niech $N = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Każdy X na prostej spełnia warunek

$$\langle N, X \rangle = c$$

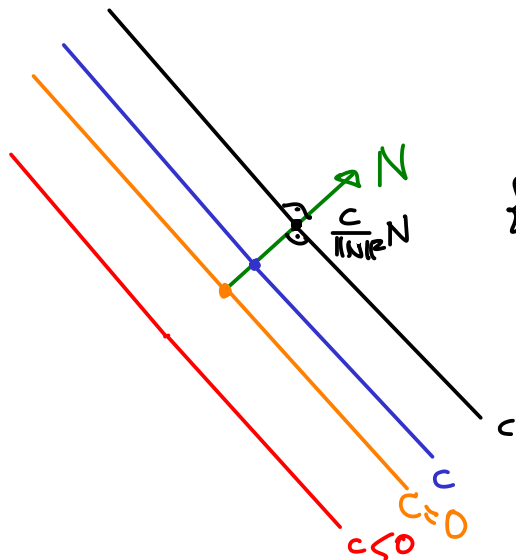
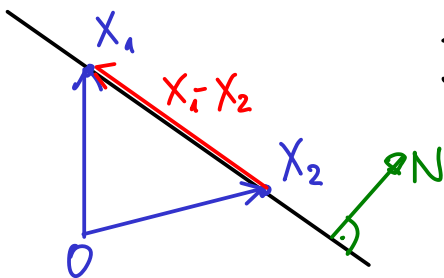
Jeśli X_1, X_2 leżą na prostej, to

$$\langle N, X_1 \rangle = c$$

$$- \langle N, X_2 \rangle = c$$

$$\langle N, X_1 \rangle - \langle N, X_2 \rangle = 0$$

$$\langle N, X_1 - X_2 \rangle = 0, \text{ tzn } X_1 - X_2 \perp N \quad \square$$



$$\{X \in \mathbb{R}^2 \mid \langle N, X \rangle = c\} \quad (\text{z ustalonym } c)$$

$$P_N X = \frac{\langle X, N \rangle}{\langle N, N \rangle} N = \frac{c}{\|N\|^2} N$$

Wektor N prostopadły do prostej l

nazywany wektorem normalnym (do) prostej l .

Zadanie. Znajdź równanie ogólne prostej przechodzącej przez punkt $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i mającej kierunek wektora $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie.

Równanie będzie postaci $ax + by = c$, gdzie $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ jest wektorem normalnym naszej prostej — tzn. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp U = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Można np. wziąć $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Równanie ma postać

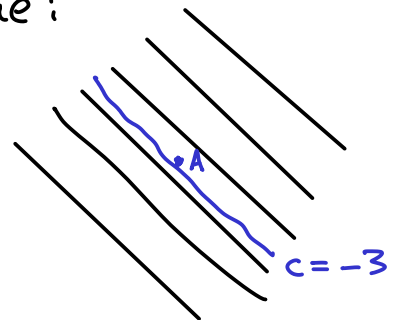
$$-3x + 2y = c$$

Punkt A leży na prostej, więc spełnia to równanie:

$$-3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = c$$

$$c = -3$$

Odp: $-3x + 2y = -3$



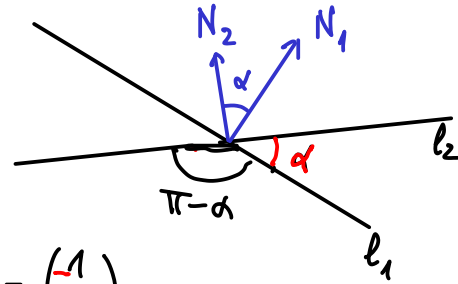
Zadanie. Pod jakim kątem przecinają się proste

$$x + y = 1, \quad x - 2y = 3$$

Rozwiązanie.

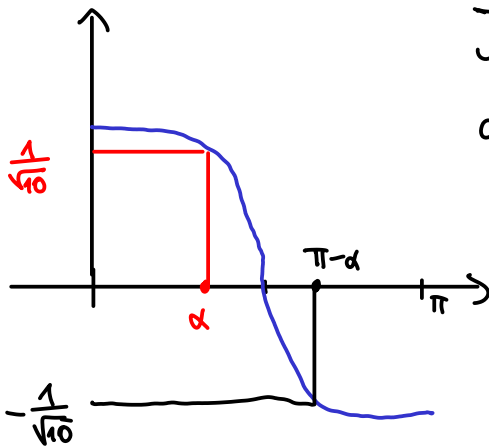
Kąt między prostymi to kąt między

ich wektorami normalnymi. $N_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $N_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$



$$\cos \angle(N_1, N_2) = \frac{\langle N_1, N_2 \rangle}{\|N_1\| \cdot \|N_2\|} = \frac{-1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

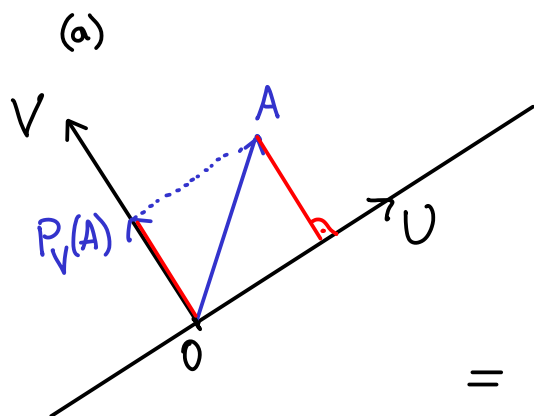
Jeśli wynik jest dodatni / ujemny, to daje on cosinus kąta ostrego / rozwartego między prostymi. Te dwa cosinusy są przeciwnymi liczbami.



Zadanie. Niech $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

a) Znajdź odległość punktu A od prostej $X = tU$.

b) Znajdź pole równoległoboku rozpiętego przez wektory A, U .

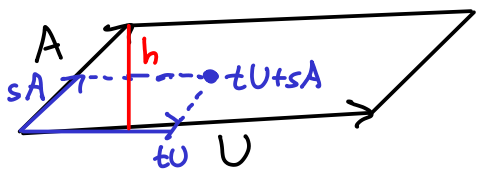


Dobieramy $V \perp U$, np $V = \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix}$.

Szukana odległość to

$$\begin{aligned} \|P_V(A)\| &= \left\| \frac{\langle A, V \rangle}{\langle V, V \rangle} V \right\| = \frac{|\langle A, V \rangle|}{|\langle V, V \rangle|} \|V\| = \\ &= \frac{|\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix} \rangle|}{\|V\|} = \frac{|-ad + bc|}{\sqrt{(-d)^2 + c^2}} = \frac{|ad - bc|}{\sqrt{c^2 + d^2}} = h \end{aligned}$$

(b) Równoległobok rozpięty przez A, U :



$$\text{Pole } \square(A, U) = \|U\| \cdot h =$$

$$= \sqrt{c^2 + d^2} \cdot \frac{|ad - bc|}{\sqrt{c^2 + d^2}} = |ad - bc|$$

$$\square(A, U) = \{tU + sA : t, s \in [0, 1]\}$$

$$\text{Pd: } \{5x : x \in \{0, 1, 3\}\} = \{5 \cdot 0, 5 \cdot 1, 5 \cdot 3\} = \{0, 5, 15\}$$

Wyznacznik

Definicja. Wyznacznikiem (uporządkowanej) pary wektorów $U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ nazywamy liczbę

$$ad - bc$$

Oznaczenia: $\det(U, V)$, $\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$.

Przykład. $\det \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$

Własności.

1) Dwuliniowość:

$$\det(tU + sV, W) = t \det(U, W) + s \det(V, W)$$

$$\det(W, tU + sV) = t \det(W, U) + s \det(W, V)$$

2) Antysymetryczność:

$$\det(U, V) = -\det(V, U)$$

Uwaga. $\det(U, U) = 0$ (z antysymetryczności)

$$\det(U, U) = -\det(U, U)$$

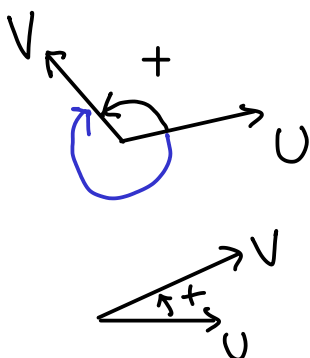
$$2 \cdot \det(U, U) = 0 \quad |:2$$

$$\det(U, U) = 0$$

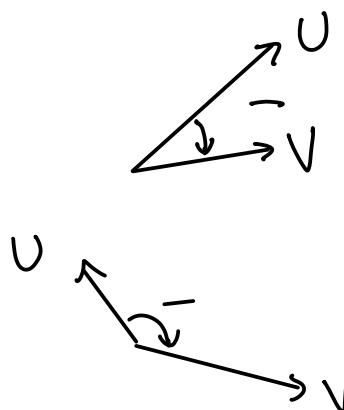
Fakt. Pole równoległoboku rozpiętego przez U, V jest równe $|\det(U, V)|$.

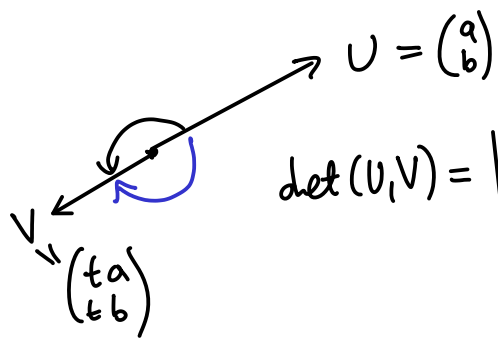
Jak interpretować znak wyznacznika?

$$\det(U, V) > 0$$



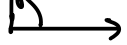
$$\det(U, V) < 0$$





$$\det(U, V) = \begin{vmatrix} a & ta \\ b & tb \end{vmatrix} = a \cdot tb - b \cdot ta = 0$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = U$$

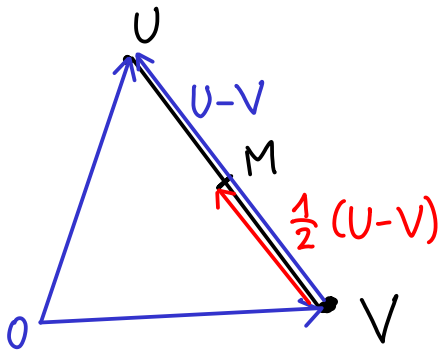
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 > 0$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

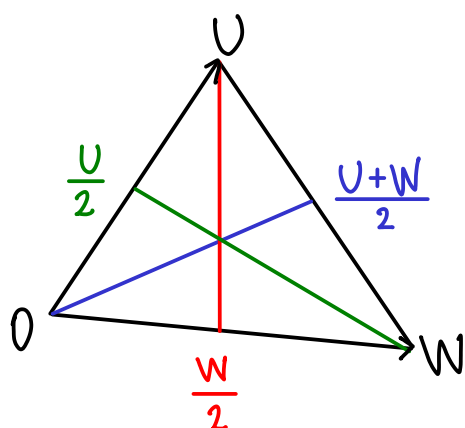
$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = -1 < 0$$

Środek odcinka.



$$\begin{aligned} M &= V + \frac{1}{2}(U-V) = V + \frac{1}{2}U - \frac{1}{2}V = \\ &= \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}V = \frac{U+V}{2} = \frac{1}{2}(U+V) \end{aligned}$$

Środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



Równania parametryczne ścieżkowych:

$$X = O + t \frac{U+W}{2}$$

$$X = W + s \left(\frac{U}{2} - W \right)$$

$$X = U + u \left(\frac{W}{2} - U \right)$$

$s, u, w, \dots$

$$X = A + tV$$

Znajdziemy punkt przecięcia P pierwszych dwóch ścieżkowych i sprawdzimy, czy leży on na trzeciej z nich.

$$P = O + t \frac{U+W}{2} = W + s \left(\frac{U}{2} - W \right)$$

dla pewnych
 $s, t \in \mathbb{R}$

$$\frac{t}{2} U + \frac{t}{2} W = \frac{s}{2} U + (1-s)W$$

tak będzie, jeśli

$$\begin{cases} \frac{t}{2} = \frac{s}{2} \rightarrow t = s \\ \frac{t}{2} = 1-s \rightarrow \frac{t}{2} = 1-t, t + \frac{t}{2} = 1, \frac{3}{2}t = 1 \\ t = \frac{2}{3} (=s) \end{cases}$$

$$t = s = \frac{2}{3}$$

Zatem: $P = O + t \frac{U+W}{2} = \frac{2}{3} \frac{U+W}{2} = \frac{U+W}{3}$

Czy P leży na trzeciej środkowej, tzn. czy

$$P = \frac{U+W}{3} = U + u \left(\frac{W}{2} - U \right) \quad (\text{dla pewnego } u)$$

$$\frac{1}{3}U + \frac{1}{3}W = (1-u)U + \frac{u}{2}W$$

tak będzie, jeśli

$$\begin{cases} \frac{1}{3} = 1-u \rightarrow \frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3} - \text{OK} \\ \frac{1}{3} = \frac{u}{2} \rightarrow u = \frac{2}{3} \end{cases}$$

P leży na trzeciej
środkowej.

$$X = A + tV \quad A = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{postać wektorowa}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 2 + t \cdot (-3) \\ y = 7 + t \cdot 4 \end{cases} \quad \leftarrow \text{postać "we współrzędnych"}$$

