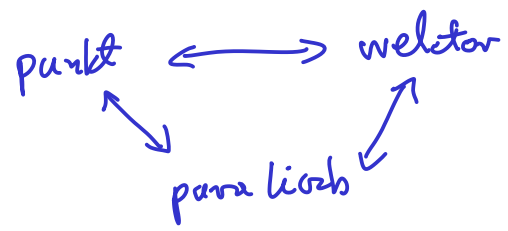
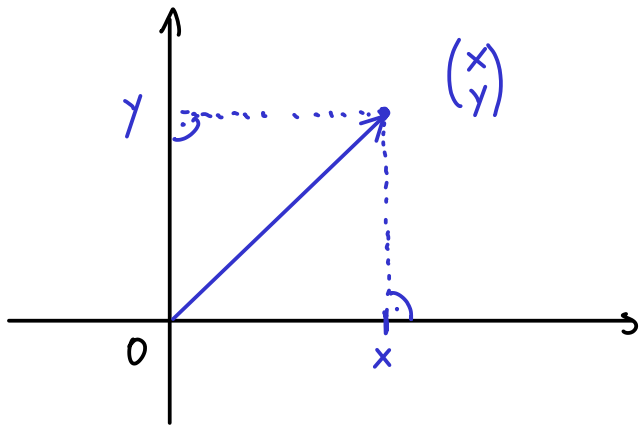


Przestrzeń $\mathbf{R}^2$ to zbiór:

- par liczb: $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbf{R} \right\}$
- punktów płaszczyzny
- wektorów



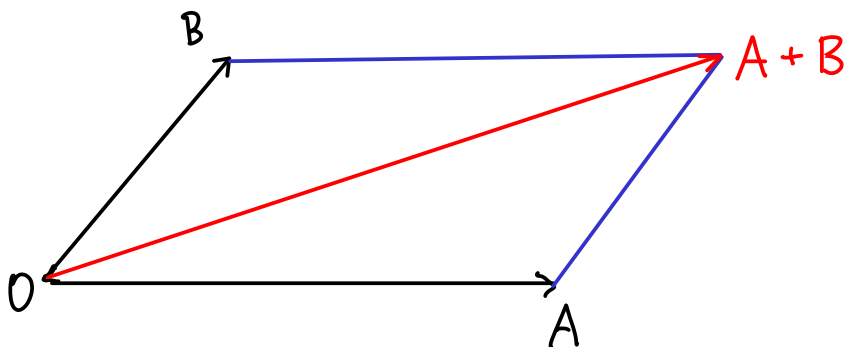
wektor zerowy: $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{00} = \vec{0} = 0$

Operacje na wektorach

Elementy $\mathbf{R}^2$ można

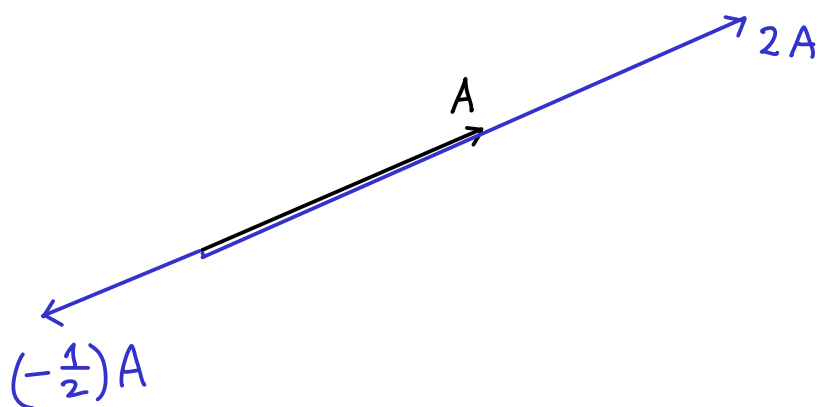
1) dodawać:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}.$$



2) mnożyć przez skalary (liczby):

$$t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix}.$$



Podstawowe własności działań (aksjomaty przestrzeni liniowej):

1. $(U + V) + W = U + (V + W)$
2. $U + V = V + U$
3. $U + \vec{0} = U$
4. dla każdego U istnieje U' , takie że $U + U' = \vec{0}$
5. $t(U + V) = tU + tV$
6. $(t + s)U = tU + sU$
7. $(ts)U = t(sU)$
8. $1 \cdot U = U$

Dowód:

8) Niech $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Wtedy 8. dla liczb

$$1 \cdot U = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x \\ 1 \cdot y \end{pmatrix} \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U$$

inne własności
analogicznie
- z wyjątkiem 4.

4) Niech $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Przyjmijmy $U' = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$. Wtedy

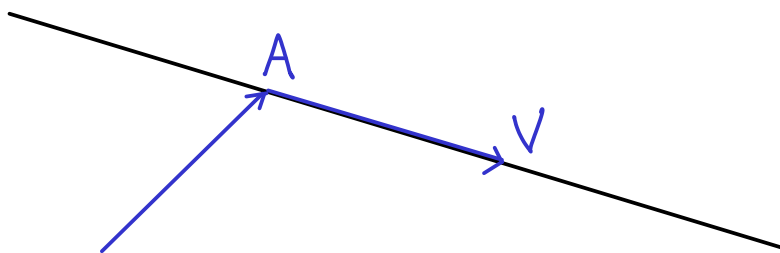
$$U + U' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + (-x) \\ y + (-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

□

Równania prostej.

a) Parametryczne:

$$X = A + tV$$



*t - parametr rzeczywisty
 $t \in \mathbb{R}$
(czas)*

Przejście do równania nieparametrycznego (ogólnego) – przykład.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X = A + tV = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \cdot 3 \\ t \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3t \\ 2 + 4t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \rightsquigarrow t = \frac{x-1}{3} \\ y = 2 + 4t \rightsquigarrow t = \frac{y-2}{4} \end{cases} \rightsquigarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} \quad \leftarrow \text{równanie nieparametryczne}$$

$$4x - 4 = 3y - 6$$

$$4x - 3y = -2 \quad \leftarrow \text{równanie ogólne}$$

b) Ogólne (nieparametryczne):

$$ax + by = c$$

Iloczyn skalarny

Definicja. Iloczynem skalarnym wektorów $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ i $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ nazywamy liczbę

$$u_1v_1 + u_2v_2.$$

Oznaczenia: $\langle U, V \rangle$, $(U|V)$, $U \circ V$, $U \cdot V$ etc.

Przykład: $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11$

Własności:

1) Dwuliniowość:

$$\langle tU + sV, W \rangle = t\langle U, W \rangle + s\langle V, W \rangle$$

$$\langle W, tU + sV \rangle = t\langle W, U \rangle + s\langle W, V \rangle$$

2) Symetryczność:

$$\langle U, V \rangle = \langle V, U \rangle$$

3) Dodatnia określoność

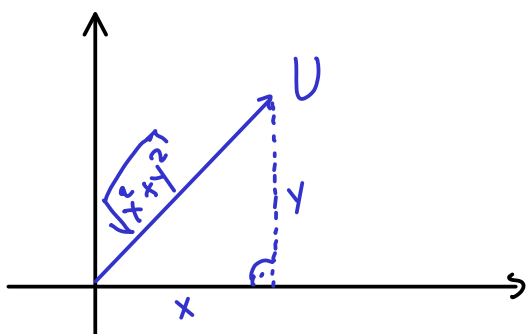
$$\langle U, U \rangle \geq 0, \quad \text{przy czym } \langle U, U \rangle = 0 \iff U = \vec{0}$$

Długość (norma) wektora.

$$\|U\| = \sqrt{\langle U, U \rangle}$$

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \langle U, U \rangle = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle = x^2 + y^2 \geq 0$$

= jedynie dla $x=y=0$,
czyli dla $U = \vec{0}$



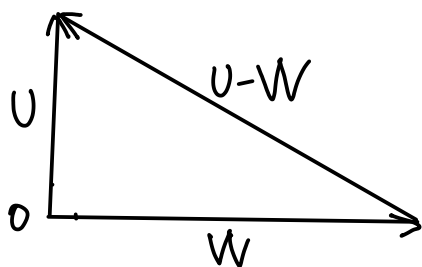
Fakt.

$\langle U, W \rangle = 0 \iff U$ jest prostopadły do W ($U \perp W$).

Dowód.

$$U \perp W \stackrel{(1)}{\iff} \|U\|^2 + \|W\|^2 = \|U - W\|^2 \stackrel{(2)}{\iff} \langle U, W \rangle = 0$$

(1) tw. Pitagorasa i tw. odwrotne



$\Rightarrow$: zakładamy, że $U \perp W$

trójkąt jest prostokątny

tw. Pitagorasa daje

$$\|U\|^2 + \|W\|^2 = \|U - W\|^2$$

$\Leftarrow$: zakładamy $\|U\|^2 + \|W\|^2 = \|U - W\|^2$

tw. odwrotne do tw. Pitagorasa:

trójkąt jest prostokątny — $U \perp W$

$$(2) \|U - W\|^2 = \langle U - W, U - W \rangle = \underbrace{\langle U - W, U \rangle}_{\text{blue}} - \underbrace{\langle U - W, W \rangle}_{\text{red}} =$$

$$= \underbrace{\langle U, U \rangle}_{\text{red}} - \underbrace{\langle W, U \rangle}_{\text{red}} - \underbrace{\langle U, W \rangle}_{\text{green}} + \underbrace{\langle W, W \rangle}_{\text{green}} =$$

$$= \|U\|^2 - 2\langle U, W \rangle + \|W\|^2$$

$$\Rightarrow \text{Zakładamy, że } \|U\|^2 + \|W\|^2 = \|U - W\|^2$$

z rachunku $\uparrow$

wiemy, że

odejmujemy stronami:

$$\|U\|^2 - 2\langle U, W \rangle + \|W\|^2 = \|U - W\|^2$$

$$2\langle U, W \rangle = 0 \quad \therefore 2$$

$$\langle U, W \rangle = 0$$

$$\Leftarrow \text{Zakładamy, że } \langle U, W \rangle = 0$$

z rachunku $\uparrow$:

$$\|U - W\|^2 = \|U\|^2 - 2\langle U, W \rangle + \|W\|^2 = \|U\|^2 + \|W\|^2$$

□

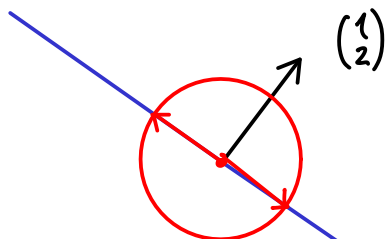
Wniosek.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right\rangle = x \cdot (-y) + y \cdot x = -xy + xy = 0$$

np $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ jest
⊥ do $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
(i do $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$)

Zadanie. Znajdź wektor długości 1 prostopadły do wektora $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Wektory prostopadłe do $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ są postaci

$$t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Szukamy t takich, by $\|t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\| = 1$

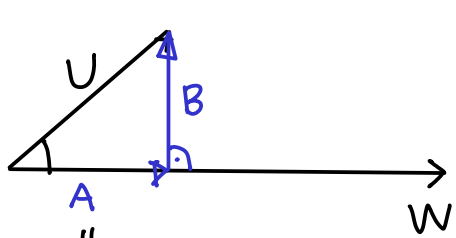
$$\|t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\| = \left\| \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-2t)^2 + t^2} = \sqrt{5t^2} = \sqrt{5} |t| \quad \leftarrow \text{równie 1 dla } |t| = \frac{1}{\sqrt{5}}, t = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Odp są dwa takie wektory: $\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

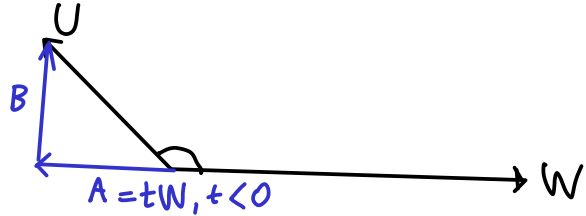
Twierdzenie.

$$\langle U, W \rangle = \|U\| \cdot \|W\| \cdot \cos \angle(U, W)$$

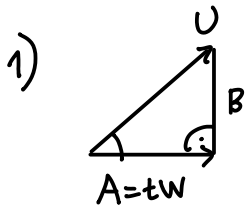
Dowód.



tW dla pewnego t .

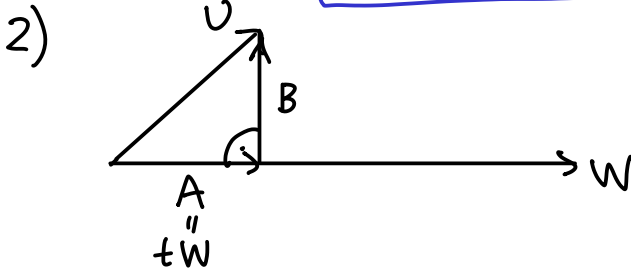


Policzmy t na dwa sposoby.



$$\cos \angle(U, W) = \frac{\pm \|A\|}{\|U\|} = \frac{\pm \|tW\|}{\|U\|} = \frac{\pm |t| \|W\|}{\|U\|} = \frac{t \|W\|}{\|U\|}$$

$$t = \frac{\|U\| \cos \angle(U, W)}{\|W\|}$$



$B \perp W$

$$U - A \perp W \stackrel{\text{Fakt}}{\Rightarrow} \langle U - A, W \rangle = 0$$

$$\| \langle U - tW, W \rangle$$

$$\langle U, W \rangle - t \langle W, W \rangle$$

Zatem

$$t = \frac{\langle U, W \rangle}{\langle W, W \rangle} = \frac{\langle U, W \rangle}{\|W\|^2}$$

Porównujemy:

$$\frac{\|U\| \cos \angle(U, W)}{\|W\|} = \frac{\langle U, W \rangle}{\|W\|^2} \quad / \cdot \|W\|^2$$

$$\|U\| \cdot \|W\| \cos \angle(U, W) = \langle U, W \rangle$$

□

Przykład.

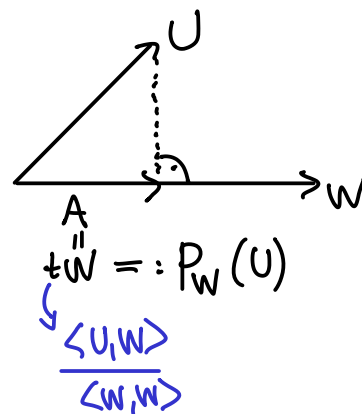
$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\cos \angle(U, W) = \frac{\langle U, W \rangle}{\|U\| \cdot \|W\|} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{\sqrt{1^2 + 2^2} \sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{11}{\sqrt{5} \cdot 5} = \frac{11}{5\sqrt{5}}$$

Rzut wektora U na (prostą rozpiętą przez) wektor W :

$$P_W(U) = \frac{\langle U, W \rangle}{\langle W, W \rangle} W$$

$$P_{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{11}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33/25 \\ 44/25 \end{pmatrix}$$



Wniosek. (tw. cosinusów)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$