

Odwracalność przekształceń

Definicja 1. Przekształcenie $F: X \rightarrow Y$ jest odwracalne, jeżeli

$$(\forall y \in Y)(\exists! x \in X)(F(x) = y).$$

[Wtedy $F^{-1}: Y \rightarrow X$, przypisujące elementowi y ów jedyny element x , którego istnienie jest zapewnione powyższym warunkiem, jest dobrze określoną funkcją z Y do X , tzw. odwrotną do F .]

Definicja 2. Przekształcenie $F: X \rightarrow Y$ jest odwracalne, jeżeli istnieje $G: Y \rightarrow X$, takie że

$$F \circ G = \text{Id}_Y, \quad G \circ F = \text{Id}_X.$$

Definicja 3. Macierz A jest odwracalna, jeśli istnieje macierz B , taka że

$$AB = I, \quad BA = I.$$

Fakt.

Jeśli F jest odwracalne, to istnieje jedyne G jak w definicji 2.

Jeśli A jest odwracalna, to istnieje jedyne B jak w definicji 3.

[Piszemy: $G = F^{-1}$ / $B = A^{-1}$ i mówimy o przekształceniu odwrotnym / macierzy odwrotnej.]

Dowód. Niech $G_1, G_2: Y \rightarrow X$ spełniają warunki definicji 2.

$$G_1 = G_1 \circ \text{Id}_Y = G_1 \circ (F \circ G_2) = (G_1 \circ F) \circ G_2 = \text{Id}_X \circ G_2 = G_2$$

Niech B_1, B_2 będą macierzami spełniającymi warunki definicji 3

$$B_1 = B_1 I = B_1 (AB_2) = (B_1 A) B_2 = I B_2 = B_2$$

Fakt.

Jeśli przekształcenie liniowe F jest odwracalne, to F^{-1} jest liniowe.

Dowód.

$$\begin{aligned} F^{-1}(X+Y) &= F^{-1}\left(F(\underline{F^{-1}(X)}) + F(\underline{F^{-1}(Y)})\right) = F^{-1}\left(F(\underline{F^{-1}(X)+F^{-1}(Y)})\right) \\ &= F^{-1}(X)+F^{-1}(Y) \end{aligned}$$

$$F^{-1}(tX) = F^{-1}(t \cdot F(\underline{F^{-1}(X)})) = F^{-1}(F(t \cdot F^{-1}(X))) = t F^{-1}(X)$$

□

Jak wyznaczyć $m(F^{-1})$ znając $m(F)$?

Fakt.

$$m(F^{-1}) = m(F)^{-1}.$$

Dowód.

$$\begin{aligned} I &= m(\text{Id}) = m(F^{-1} \circ F) = m(F^{-1}) m(F) \\ I &= m(\text{Id}) = m(F \circ F^{-1}) = m(F) m(F^{-1}) \end{aligned} \left. \begin{array}{l} I = B \quad A \\ I = A \quad B \end{array} \right\} \Rightarrow m(F^{-1}) = m(F)^{-1}$$

$$m(F) = A$$

$$m(F)^{-1} = B$$

□

Praktyczne liczenie macierzy odwrotnej

$$F(X) = Y \iff X = F^{-1}(Y)$$

$$\underline{AX = Y} \iff X = A^{-1}Y$$

Przykład.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$(A | I)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 & = 1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 \\ 3x_1 + 4x_2 = y_2 & / -2[1] = 0 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) -2[1]$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 & / -[2] = 1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 \\ x_1 & = y_2 - 2y_1 & = -2 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) -[2]$$

$$\begin{cases} 2x_2 = y_1 - (y_2 - 2y_1) & / \cdot (\frac{1}{2}) \\ x_1 & = -2y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \times (\frac{1}{2})$$

$$\begin{cases} x_1 = -2y_1 + y_2 \\ x_2 = \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right)$$

$$(I | A^{-1})$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\parallel}{X} = \overset{\parallel}{A}^{-1} \cdot \overset{\parallel}{Y}$$

$$(A | I) \xrightarrow{\text{operacje}} (I | B)$$

operacje wierszowe

- dodajemy krotkość wiersza do innego wiersza
- zamieniamy kolejność wierszy
- mnożymy wiersz przez niezerowy skalar

to będzie A^{-1}

Fakt. Jeśli $\det A \neq 0$, to A jest odwracalna.

Dowód.

Niech $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $W = \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Rozwiązujemy układ $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ cx_1 + dx_2 = y_2 \end{cases}$

$$AX=Y \rightsquigarrow X=A^{-1}Y$$

Wzory Cramera dają:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & b \\ y_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{dy_1 - by_2}{ad - bc}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & y_1 \\ c & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{-cy_1 + ay_2}{ad - bc}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

□

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Zadanie:



$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

Wniosek: Jeśli macierz A jest odwracalna, to $\det(A) \neq 0$.

$$AB = I$$

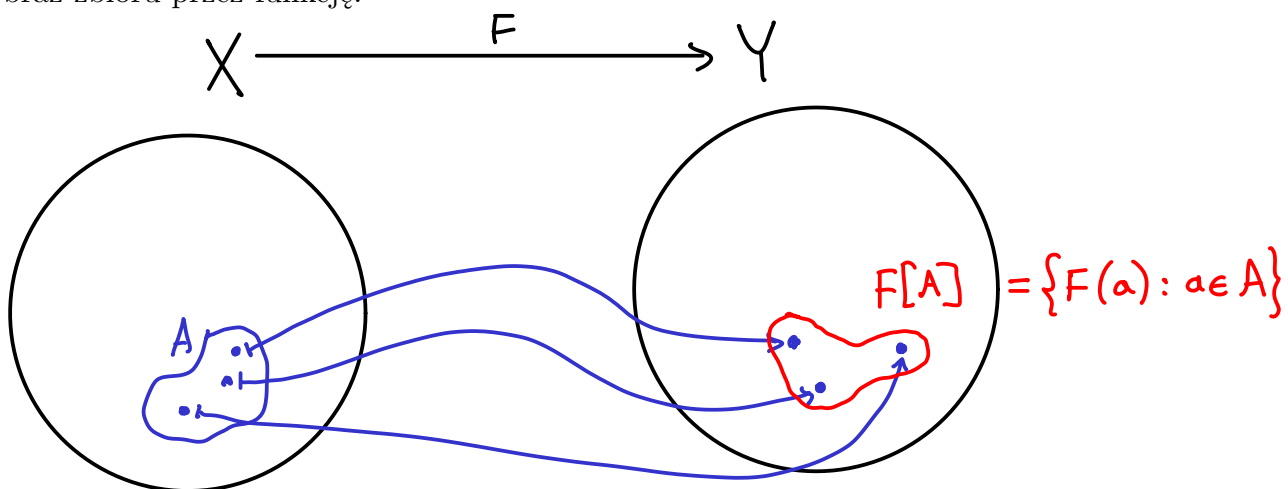
$$1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \det I = \det(AB) \stackrel{(2)}{=} \det A \cdot \det B$$

0

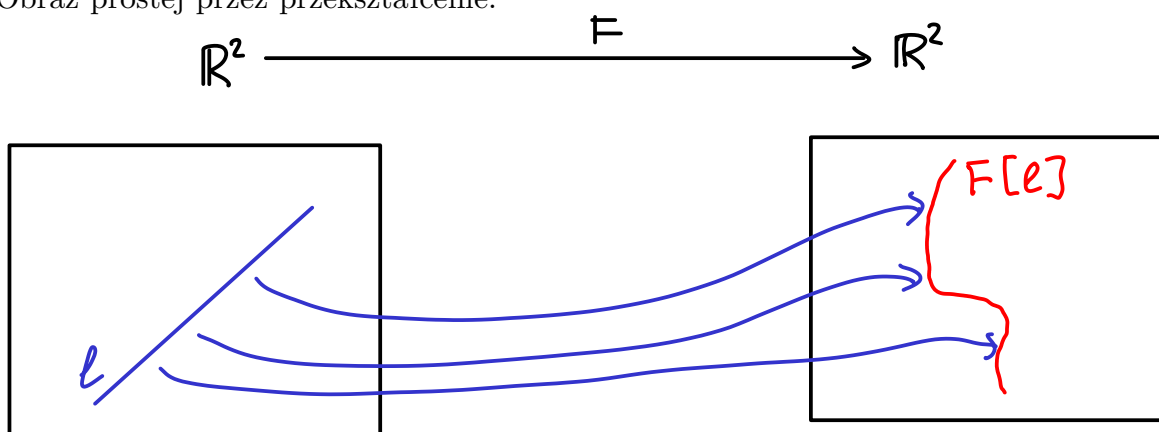
Twierdzenie. A jest odwracalna $\iff \det A \neq 0$.

Obrazy prostych

Obraz zbioru przez funkcję.



Obraz prostej przez przekształcenie.

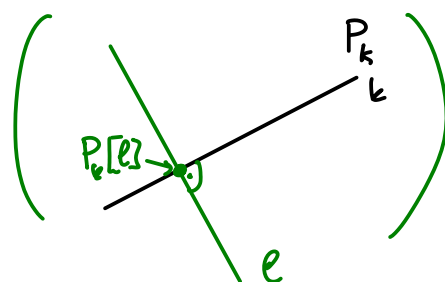


Fakt. Niech F będzie przekształceniem liniowym. Jeśli prosta ℓ ma równanie parametryczne $X = A + tV$ oraz $F(V) \neq 0$, to $F[\ell]$ jest prostą o równaniu $X = F(A) + tF(V)$.

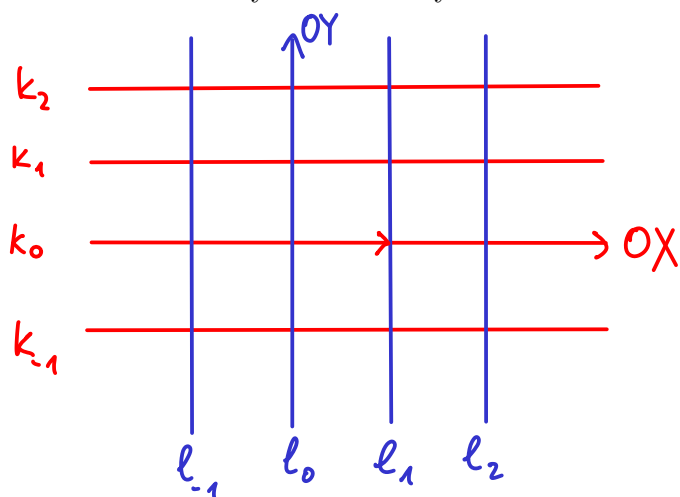
$$\ell = \{A + tV : t \in \mathbb{R}\}$$

$$F[\ell] = \{F(A + tV) : t \in \mathbb{R}\} = \{F(A) + tF(V) : t \in \mathbb{R}\} \leftarrow \text{prosta o równaniu } X = F(A) + tF(V)$$

(Jeśli $F(V) = 0$, to $F[\ell] = \{F(A)\}$)



Przykład. Jak wyobrazić sobie działanie przekształcenia liniowego?



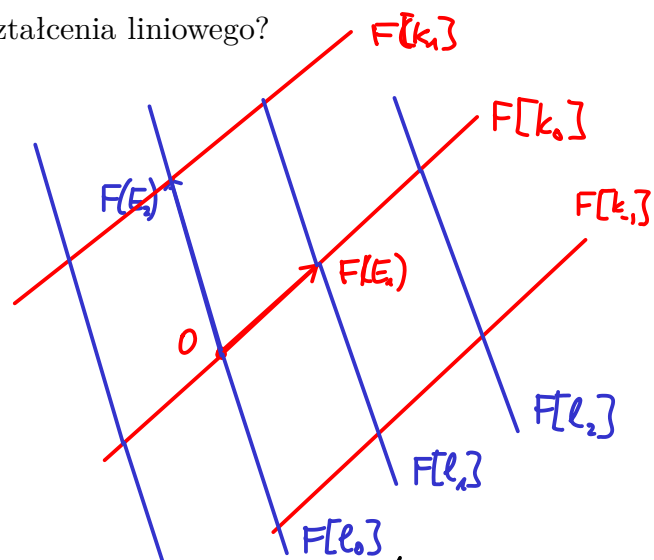
$$k_0: X = 0 + tE_1$$

$$k_1: X = E_2 + tE_1$$

$$k_2: X = 2 \cdot E_2 + tE_1$$

$$l_1: X = E_1 + tE_2$$

$$F \mapsto m(F) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$



$$\xrightarrow{F} X = 0 + tF(E_1) = t \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$X = F(E_2) + tF(E_1) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow X = F(E_1) + tF(E_2) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Zadanie.

Wyznacz równanie obrazu prostej ℓ zadanej równaniem $2x + y = 3$ przez przekształcenie liniowe F o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$F: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+4y \end{pmatrix}$$

$$2x + y = 3$$

$$2(x+2y) + (3x+4y) = 3$$

$$(*) \quad \underline{5x + 8y = 3}$$

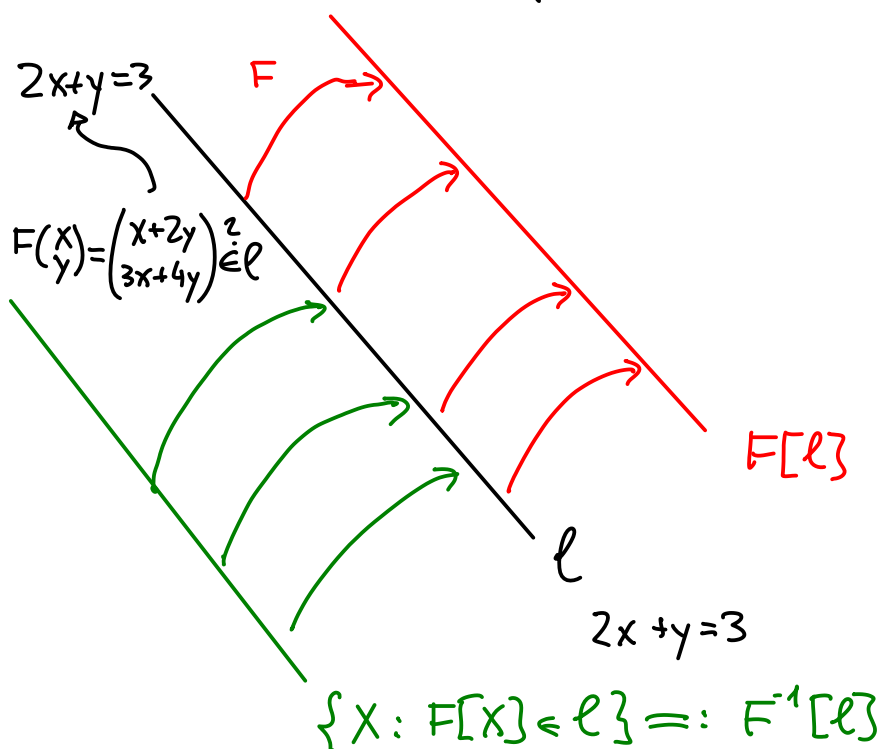
Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ leży na ℓ

$$F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow 5 \cdot 3 + 8 \cdot 7 \neq 3 \quad ??$$



To nie jest równanie obrazu ℓ przez F ,
tylko przeciwobraz ℓ przez F :



(*) sprawdź, czy $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \in \ell$

- opisz więc
przeciwobraz ℓ przez F
 $F^{-1}[\ell]$

Sposób 1.

Przechodzimy do równania parametrycznego.

$$2x + y = 3 \leadsto X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \leftarrow \text{równanie parametryczne } l$$

wektor normalny: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

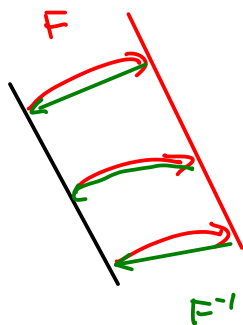
$$\boxed{-5x + 3y = 6}$$

$$\uparrow \\ -5 \cdot 3 + 3 \cdot 7$$

$$\begin{array}{c} \downarrow F \\ X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \leftarrow \text{równanie parametryczne } F[l] \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sposób 2.

$F[l] = (F^{-1})^{-1}[l]$ – jeśli F jest odwracalne, to obraz przez F = przeciwobraz przez F^{-1} .



$$m(F^{-1}) = m(F)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$F^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$$

$$2x + y = 3$$

$$2(-2x + y) + \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y\right) = 3 \quad / \cdot 2$$

$$4(-2x + y) + (3x - y) = 6$$

$$-5x + 3y = 6$$