

Przekształcenia liniowe

Przekształcenie $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ jest liniowe, jeśli

a) jest postaci

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

(dla pewnych $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, zależnych od F).

b) (równoważnie) jest addytywne i jednorodne:

$$(\forall X, Y \in \mathbf{R}^2)(F(X+Y) = F(X) + F(Y)), \quad (\forall X \in \mathbf{R}^2)(\forall t \in \mathbf{R})(F(tX) = tF(X)).$$

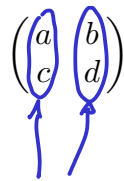
Macierze

Macierz przekształcenia opisanego wzorem z a): $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

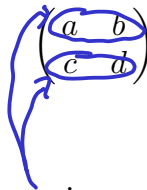
Każdemu liniowemu przekształceniu płaszczyzny F odpowiada jedna macierz $m(F)$.

Każdej macierzy A [rozmiaru 2×2 , o wyrazach rzeczywistych] odpowiada jedno przekształcenie liniowe F_A .

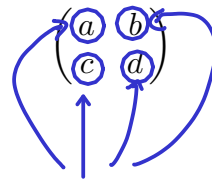
Anatomia macierzy



kolumny



wiersze



wyrazy

Uwaga. Kolumnami $m(F)$ są wektory $F(E_1)$, $F(E_2)$.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Przykłady

$$1) J_{\alpha} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + \alpha \cdot y \end{pmatrix}; m(J_{\alpha}) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ ← przekształca macierzy

$$2) S_{x=y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x + 1 \cdot y \\ 1 \cdot x + 0 \cdot y \end{pmatrix}; m(S_{x=y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3)

$$P_{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y \\ \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y \end{pmatrix}, \quad m(P_{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

4) ℓ – prosta $X = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$S_{\ell} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{pmatrix}, \quad m(S_{\ell}) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

5)

$$\text{Id} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{pmatrix}, \quad m(\text{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: I. \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{macierz} \\ \text{identycznościowa} \\ \text{(jednostkowa)} \end{matrix}$$

6)

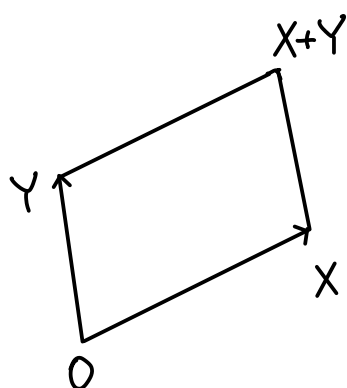
$$Z \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0, \quad m(Z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: 0. \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{macierz} \\ \text{zerowa} \end{matrix}$$

$$\underline{F \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = F \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)}$$

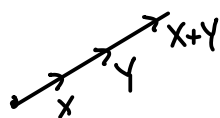
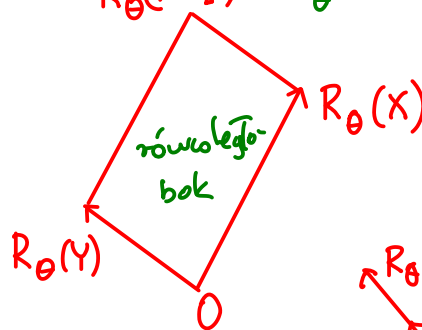
Macierz obrotu

Sprawdźmy, że R_θ (obrót wokół zera przeciwnieżyrowo o kąt θ) jest liniowe.

Addytywność:



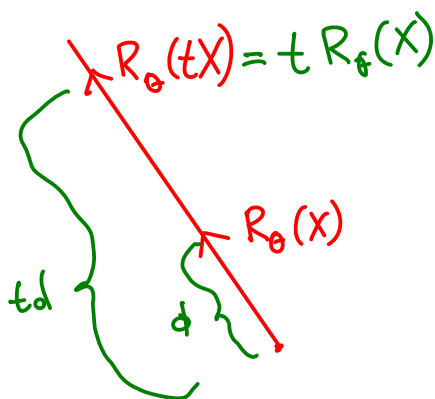
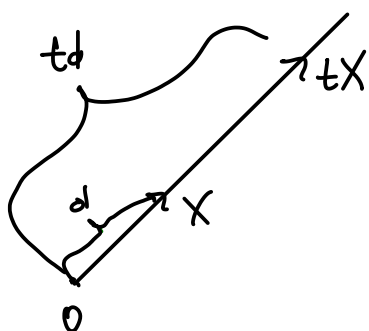
$$R_\theta(X+Y) = R_\theta(X) + R_\theta(Y)$$



$$R_\theta(X+Y) = R_\theta(X) + R_\theta(Y)$$

Ćw co gdy X, Y są lż?

Jednorodność:

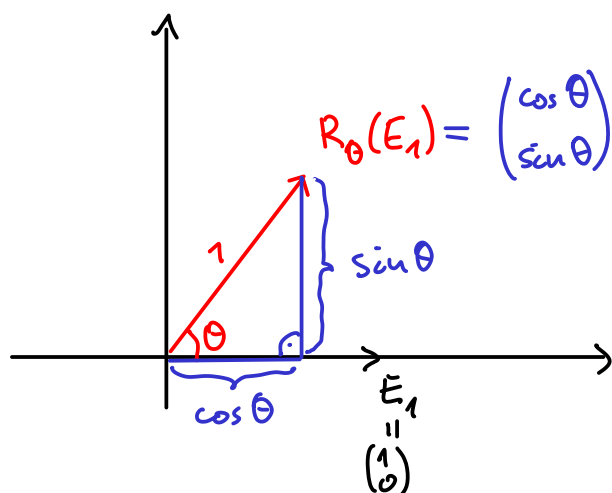


jednorodność $\Rightarrow$ addytywności dla X, Y lż

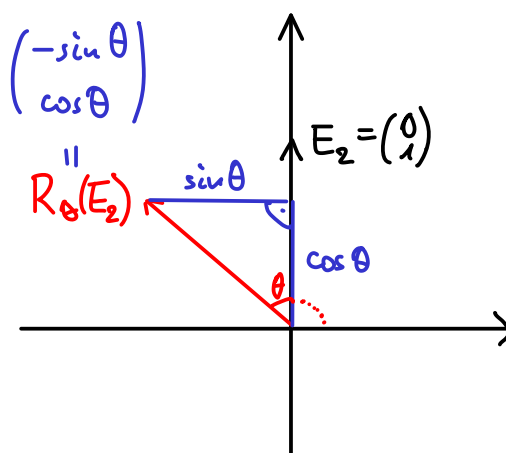
$$X, Y \text{ lż} \Rightarrow \underline{X = \alpha Y \text{ lub } Y = \beta X}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow R_\theta(X+Y) &= R_\theta(\alpha Y + Y) = R_\theta((\alpha+1)Y) \stackrel{(j)}{=} (\alpha+1) R_\theta(Y) = \\ &= \alpha R_\theta(Y) + R_\theta(Y) \stackrel{(j)}{=} R_\theta(\alpha Y) + R_\theta(Y) = R_\theta(X) + R_\theta(Y) \end{aligned}$$

Wiemy zatem, że R_θ jest liniowe. Ma więc ono macierz, której kolumnami są wektory $R_\theta(E_1)$ i $R_\theta(E_2)$.



$$R_\theta(E_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R_\theta(E_2)$$

$$m(R_\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$m(R_\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Wzór na obrót:

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cdot x - \sin \theta \cdot y \\ \sin \theta \cdot x + \cos \theta \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Nakładanie macierzy na wektor:

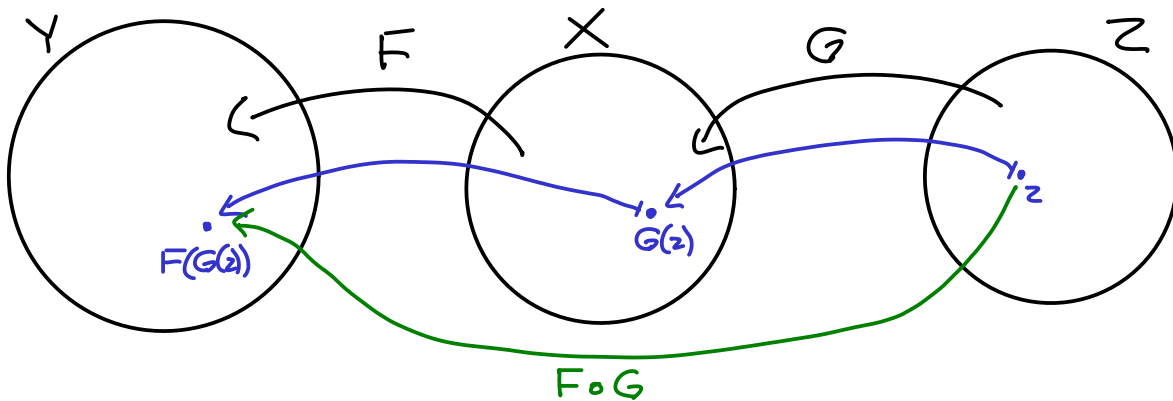
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \end{pmatrix}$$

Pd

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \dots$$

Uwaga: $F(X) = m(F)X$ (dla liniowej F)



Złożenie przekształceń

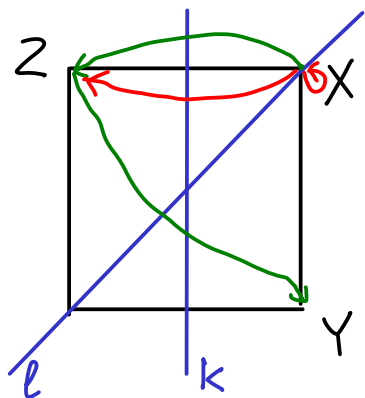
Definicja. Niech $F, G: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$. Definiujemy złożenie F i G : jest to przekształcenie $F \circ G: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ dane jako $(F \circ G)(X) = F(G(X))$.

Przykład 1. Składanie translacji

$$(T_U \circ T_W)(X) = T_U(T_W(X)) = T_U(X + W) = X + W + U = T_{U+W}(X)$$

A więc $T_U \circ T_W = T_{U+W}$.

Przykład 2. Składanie odbić – nieprzemienność.



- $S_l \circ S_k (X) = S_l (S_k(X)) = S_l(Z) = Y$

- $S_k \circ S_l (X) = S_k (X) = Z$

wniosek: $S_l \circ S_k \neq S_k \circ S_l$

Fakt. Złożenie przekształceń liniowych jest liniowe.

Dowód. Niech F, G będą liniowe.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad (F \circ G)(X + Y) &= F(G(X+Y)) \stackrel{G \text{ liniowe}}{=} F(G(X) + G(Y)) \stackrel{F \text{ liniowe}}{=} F(G(X)) + F(G(Y)) = \\ &= (F \circ G)(X) + (F \circ G)(Y) \end{aligned}$$

$$\text{(i)} \quad (F \circ G)(tX) = F(G(tX)) = F(tG(X)) = t F(G(X)) = t(F \circ G)(X) \quad \square$$

Macierz złożenia

Niech F, G będą liniowymi przekształceniami płaszczyzny.

Pokazaliśmy, że wtedy $F \circ G$ też jest liniowe.

Czy potrafimy wyliczyć macierz $m(F \circ G)$ w terminach $m(F)$ i $m(G)$?

$$\begin{aligned}
 m(F \circ G) &= ((F \circ G)(E_1), (F \circ G)(E_2)) = (F(G(E_1)), F(G(E_2))) = \\
 &= (m(F) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{natężenie } m(F) \\ \text{na wektor } G(E_1)}}{G(E_1)}, m(F) G(E_2)) = \left(m(F) \begin{pmatrix} \text{pierwsza} \\ \text{kolumna} \\ m(G) \end{pmatrix}, m(F) \begin{pmatrix} \text{druga} \\ \text{kolumna} \\ m(G) \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

$$m(F) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, m(G) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}; m(F \circ G) = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b' \\ d' \end{pmatrix} \right)$$

definicja mnożenia macierzy

mnemotechnika:

$$\begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} i\text{-ty} \\ \text{wiersz} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \text{---} \end{pmatrix} \begin{matrix} j\text{-ta} \\ \text{kolumna} \end{matrix} \begin{pmatrix} | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} i\text{-ty} \\ \text{wiersz} \end{matrix}$$

j-ta kolumna

$$\begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ \end{pmatrix}$$

2x2 2x1 2x1

nakładanie macierzy na wektor
jest szczególnym przypadkiem
mnożenia macierzy.

Fakt. $m(F \circ G) = m(F)m(G)$.

$$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$$

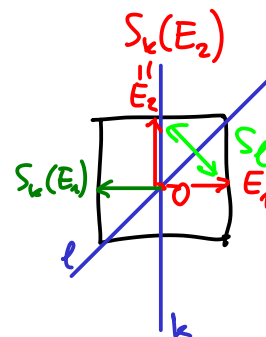
Wniosek: mnożenie macierzy jest łączne (bo składanie przekształceń jest łączne)

$$\begin{matrix} F & G & H \\ | & | & | \end{matrix}$$

$$(AB)C = (m(F)m(G))m(H) = m(F \circ G)m(H) = m((F \circ G) \circ H)$$

$$A(BC) = m(F)(m(G)m(H)) = m(F)m(G \circ H) = m(F \circ (G \circ H))$$

Przykład 2, cd.

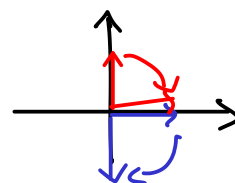


$$m(S_k) = (S_k(E_1), S_k(E_2)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m(S_l) = (S_l(E_1), S_l(E_2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

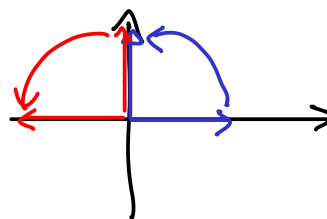
$$m(S_l \circ S_k) = m(S_l)m(S_k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = m(R_{-\pi/2})$$

$$S_l \circ S_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$



$$m(S_k \circ S_l) = m(S_k)m(S_l) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = m(R_{\pi/2})$$

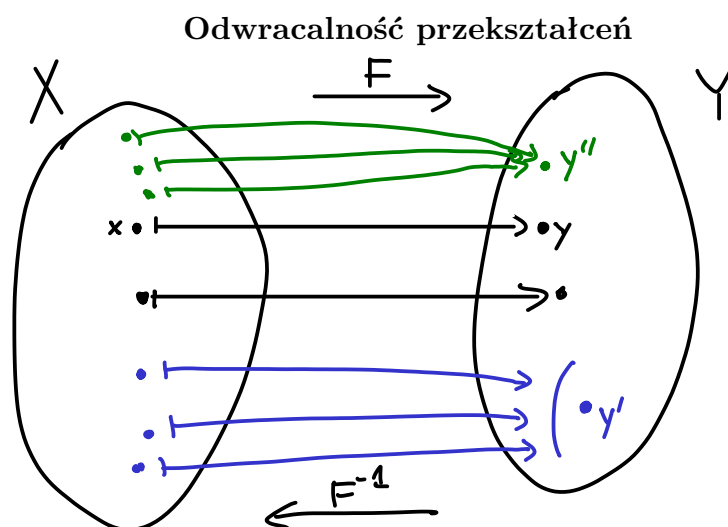
$$S_k \circ S_l \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$



Wniosek

$$S_k \circ S_l = R_{\pi/2}$$

(bo są to liniowe przekształcenia o tej samej macierzy)



Definicja 1. Przekształcenie $F: X \rightarrow Y$ jest odwracalne, jeżeli

$$(\forall y \in Y)(\exists! x \in X)(F(x) = y).$$

$\exists!$ istnieje jedyne

[Wtedy $F^{-1}: Y \rightarrow X$, przypisujące elementowi y ów jedyny element x , którego istnienie jest zapewnione powyższym warunkiem, jest dobrze określoną funkcją z Y do X , tzw. odwrotną do F .]

Definicja 2. Przekształcenie $F: X \rightarrow Y$ jest odwracalne, jeżeli istnieje $G: Y \rightarrow X$, takie że

$$F \circ G = \text{Id}_Y, \quad G \circ F = \text{Id}_X.$$

Definicja 3. Macierz A jest odwracalna, jeśli istnieje macierz B , taka że

$$AB = I, \quad BA = I.$$

Fakt.

Jeśli F jest odwracalne, to istnieje jedyne G jak w definicji 2.

Jeśli A jest odwracalna, to istnieje jedyne B jak w definicji 3.

[Piszemy: $G = F^{-1}$ / $B = A^{-1}$ i mówimy o przekształceniu odwrotnym / macierzy odwrotnej.]

Dowód.