

Diagonalizacja

$$AU = \lambda U$$

$$\chi_A(x) = \det(A - x \cdot I)$$

Fakt 1. λ jest wartością własną $A \iff \chi_A(\lambda) = 0$.

Fakt 2. Jeśli λ, η są dwiema różnymi wartościami własnymi A , zaś U, W odpowiadającymi im niezerowymi wektorami własnymi, to U, W są liniowo niezależne.

Twierdzenie. (o diagonalizacji).

Założmy, że U_1, U_2 są liniowo niezależnymi wektorami własnymi macierzy A odpowiadającymi wartościom własnym λ_1, λ_2 . Wtedy

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

gdzie P jest macierzą o kolumnach U_1, U_2 .

Definicja. Macierz postaci $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$ nazywamy *diagonalną*. Macierz A jest *diagonalizowalna*, jeśli $A = PDP^{-1}$ dla pewnej diagonalnej macierzy D i pewnej odwracalnej macierzy P .

Wniosek. Jeśli macierz (rozmiaru 2×2) ma dwie różne wartości własne, to jest diagonalizowalna.

Przykład.

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Potęgowanie macierzy diagonalnej

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 0 \\ 0 & \mu^3 \end{pmatrix}$$

$$\dots \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} \quad \dots \text{a diagonalizowalnej:}$$

$$(PDP^{-1})^n = \cancel{PDP^{-1}} \cancel{PDP^{-1}} \cancel{PDP^{-1}} \dots \cancel{DP^{-1}} PDP^{-1} = PD^n P^{-1}$$

Przykład.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}^{100} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}^{100} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{100} & 0 \\ 0 & (\frac{1}{6})^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6^{-100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 6^{-100} \\ 3 & -6^{-100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 + 3 \cdot 6^{-100} & 2 - 2 \cdot 6^{-100} \\ 3 - 3 \cdot 6^{-100} & 3 + 2 \cdot 6^{-100} \end{pmatrix}$$

$$A^{100} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 + \frac{3}{5} \cdot 6^{-100} \\ 3/5 - \frac{3}{5} \cdot 6^{-100} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

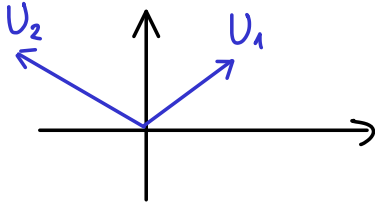
Dynamiczna interpretacja diagonalizacji

$$A = P D P^{-1}$$

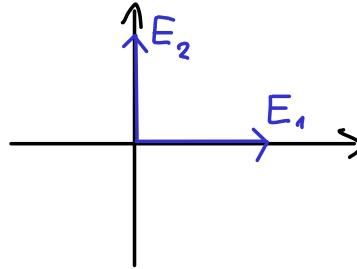
$$P = (U_1, U_2)$$

$$F_P: E_1 \mapsto U_1$$

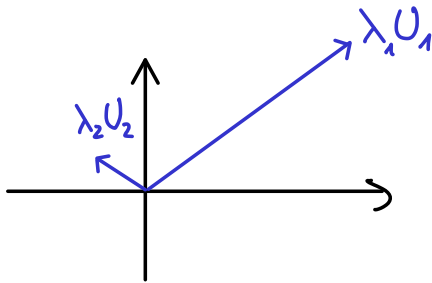
$$F_P: E_2 \mapsto U_2$$



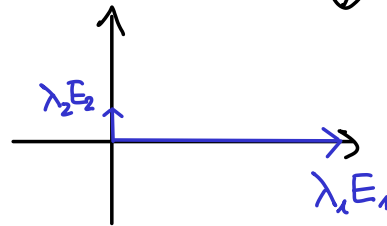
$$P^{-1}$$



$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$



$$P$$



Liniowe układy współrzędnych

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \mathbf{E}_1 + y \mathbf{E}_2$$

Definicja.

Bazą $\mathbf{R}^2$ nazywamy uporządkowaną liniowo niezależną parę wektorów (U, W) (gdzie $U, W \in \mathbf{R}^2$).

Każdy wektor $X \in \mathbf{R}^2$ można jednoznacznie przedstawić w danej bazie:

$$X = uU + wW, \quad u, w \in \mathbf{R}.$$

W tym wzorze liczby u, w zależą od X ;

przy ustalonej bazie (U, W) można je traktować jak funkcje $X \mapsto u, X \mapsto w$;

tę parę funkcji $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy *liniowym układem współrzędnych* związanym z bazą (U, W) .

Będziemy pisać: $X = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$

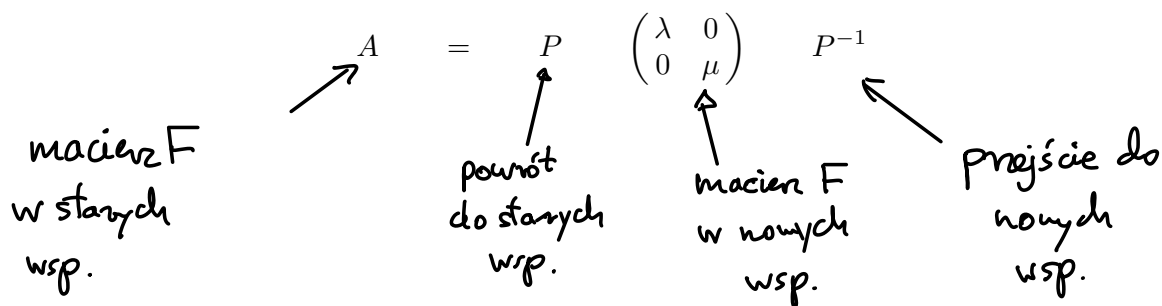
Jeśli baza (U, W) składa się z wektorów własnych przekształcenia liniowego F , to we współrzędnych związanych z tą bazą F jest dane macierzą diagonalną:

$$F \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = F(uU + wW) = uF(U) + wF(W) = u\lambda U + w\mu W = \begin{bmatrix} \lambda u \\ \mu w \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$$

Związek nowych i starych współrzędnych:

$$x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2 = X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = uU + wW = (U, W) \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}, \quad P = (U, W)$$

Statyczna interpretacja diagonalizacji



Przykład.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. — Zdiagonalizuj!

1) Liczymy $\chi_A(x)$. $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = (x-2)(x-1)$

2) Wartości własne : pierwiastki $\chi_A(x)$. $\lambda = 1, \mu = 2$

3) Wektory własne.

$$\lambda = 1$$

$$AX = 1 \cdot X$$

$$\begin{cases} 2x + 0 \cdot y = 1 \cdot x \\ 1x + 1 \cdot y = 1 \cdot y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = x \\ x + y = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$x = 0, y \text{ dowolne}$$

$$X = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mu = 2$$

$$AX = 2 \cdot X$$

$$\begin{cases} 2x = 2x \\ x + y = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$x = y$$

$$X = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Diagonalizacja :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\underset{A}{\parallel} \quad \underset{P}{=} \quad \underset{D}{\parallel} \quad \underset{P^{-1}}{\parallel}$$

$$\begin{matrix} P^{-1} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \parallel \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

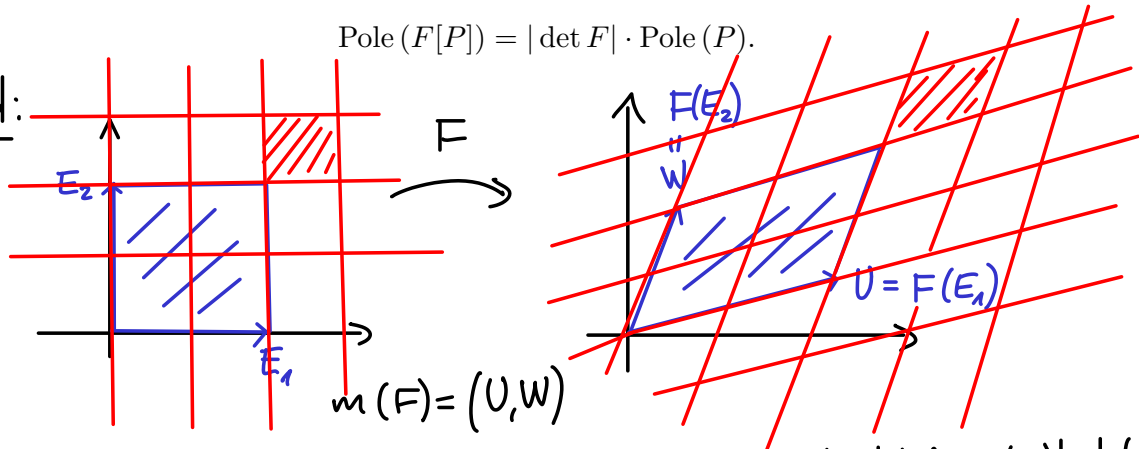
$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} & \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} \\ \downarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & \uparrow P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} & \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

Geometryczna interpretacja wyznacznika macierzy

Fakt. Przekształcenie liniowe F zmienia pola figur ze skalą $|\det F|$, tzn, dla dowolnej figury $P \subset \mathbb{R}^2$ mającej pole zachodzi

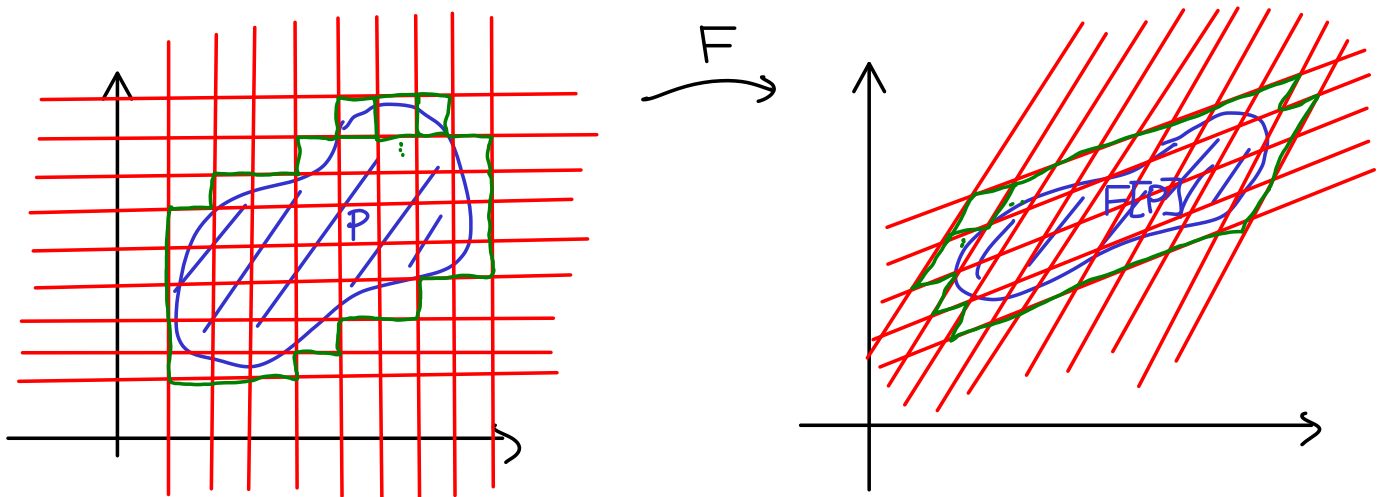
$$\text{Pole}(F[P]) = |\det F| \cdot \text{Pole}(P).$$

Dowód:



$$\text{Pole } F[\square(E_1, E_2)] = \text{Pole } \square(U, W) = |\det(U, W)| = |\det m(F)| = |\det F| \cdot \text{Pole } \square(E_1, E_2)$$

wzór z tego zachodzi dla figur zbudowanych z szeregowych kwadratów.



$$\text{Pole sumy zielonych } \square \cdot |\det F| = \text{Pole sumy zielonych } \square$$

bienany
coraz drobniejsze
siatki

$\downarrow$
Pole P

$\cdot |\det F| =$

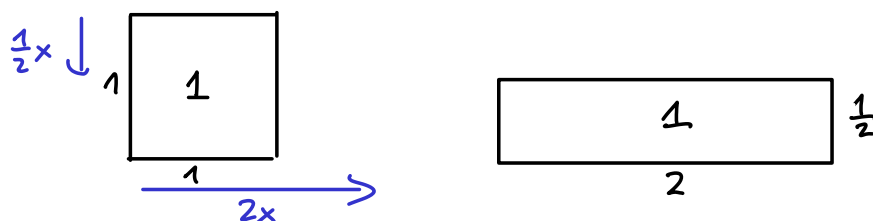
$\downarrow$
Pole $F[P]$

$\square$

Przykład.

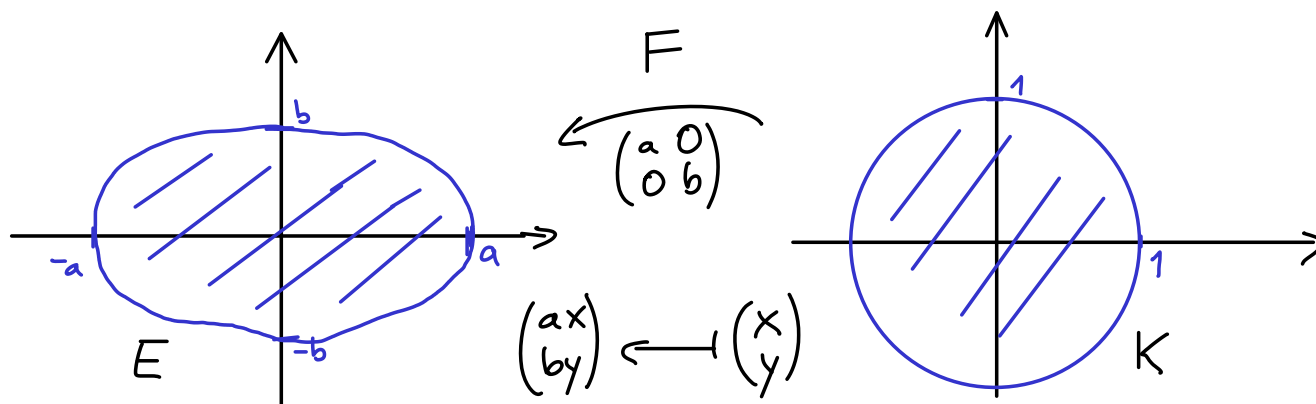
Przekształcenie o macierzy $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ zachowuje pole $\iff ab = \pm 1$.

Np. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$



Przykład.

Pole pełnej elipsy $\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1 \}$ (gdzie $a, b > 0$) jest równe πab .



$$E: \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1$$

$$F^{-1}[E] : \left(\frac{ax}{a}\right)^2 + \left(\frac{by}{b}\right)^2 \leq 1$$

$$x^2 + y^2 \leq 1 : K$$

Wniosek: $F^{-1}[E] = K$

$$E = F[K] \quad (\text{bo } F \text{ jest odwracalne})$$

$$\text{Pole } E = \text{Pole } F[K] = \text{Pole } K \cdot |\det F| = \pi \left| \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} \right| = \pi |ab| = \pi ab$$

$$\sum_{i=1}^N |a_i a_{i+1}| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int \dots = ?$$