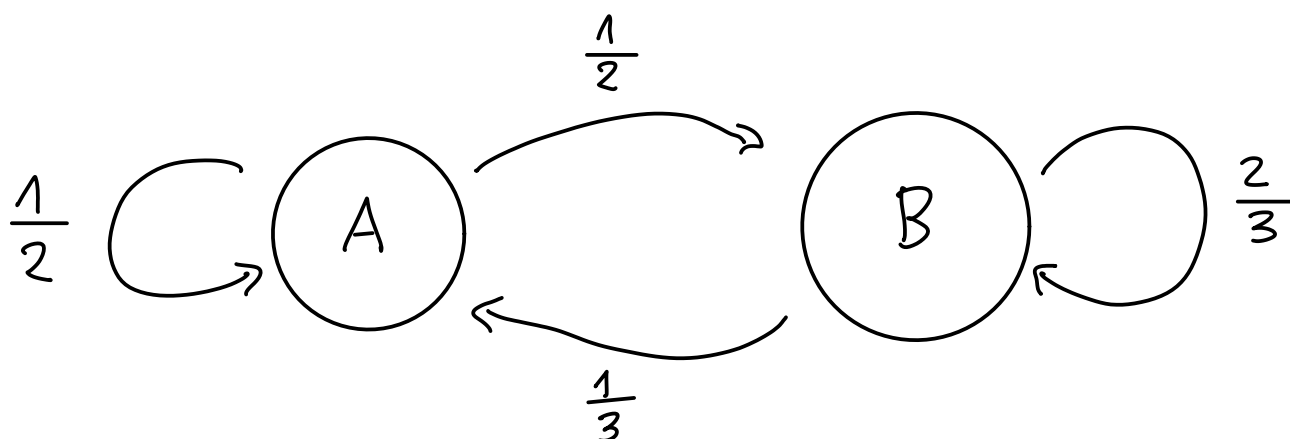


Diagonalizacja



jesteśmy: w A z prawdopodobieństwem p

w B z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$;

następnego dnia jesteśmy: w A z prawdopodobieństwem $p \cdot \frac{1}{2} + q \cdot \frac{1}{3}$

w B z prawdopodobieństwem $p \cdot \frac{1}{3} + q \cdot \frac{2}{3}$

p_n / q_n - prawdopodobieństwa że jesteśmy w A / B po n dniach.

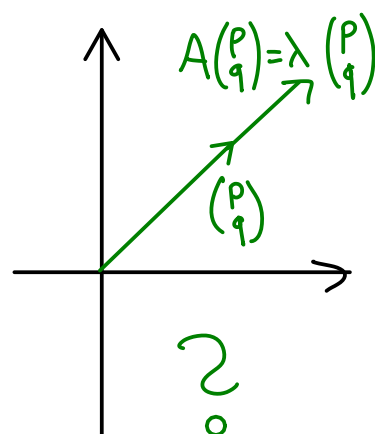
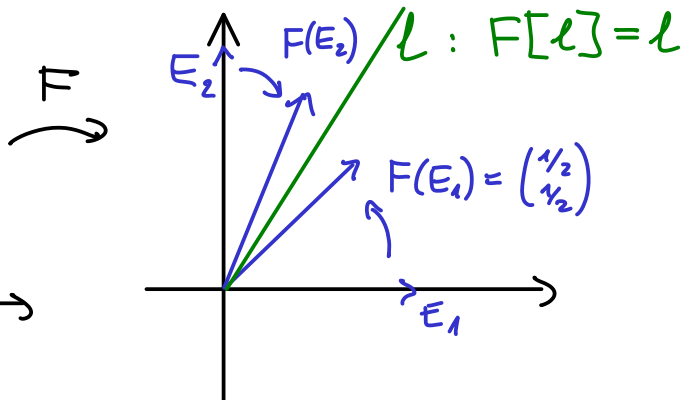
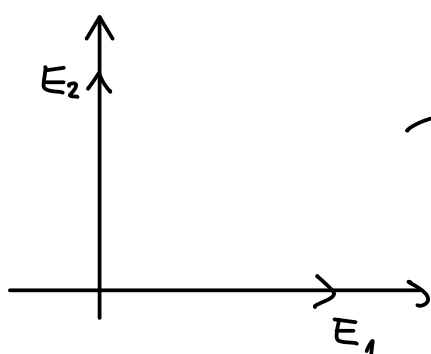
$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}q_n \\ \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p_0=1 \\ q_0=0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\parallel}{X_{n+1}} = \underset{\parallel}{A} \underset{\parallel}{X_n}, \quad X_{100} = ?$$

$$\begin{aligned} X_{100} &= A X_{99} = A (A X_{98}) = (A \cdot A) X_{98} = A^2 X_{98} = A^2 (A X_{97}) = (A^2 \cdot A) (X_{97}) = \\ &= A^3 X_{97} = \dots = A^{100} X_0 \end{aligned}$$

Niech $F = F_A$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$



Czy istnieje prosta ℓ (przechodząca przez 0), taka że $F_A[\ell] = \ell$?

Równoważnie: czy istnieje niezerowy wektor $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, taki że $A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ (dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$)?

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}p + \frac{1}{3}q \\ \frac{1}{2}p + \frac{2}{3}q \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda p \\ \lambda q \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}p + \frac{1}{3}q = \lambda \cdot p \\ \frac{1}{2}p + \frac{2}{3}q = \lambda \cdot q \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Dla jakich } \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{ten układ ma niezerowe rozwiązanie?} \end{array}$$

$$\begin{cases} (\frac{1}{2} - \lambda)p + \frac{1}{3}q = 0 \\ \frac{1}{2}p + (\frac{2}{3} - \lambda)q = 0 \end{cases} \quad \text{ma niezerowe rozwiązanie} \Leftrightarrow W=0$$

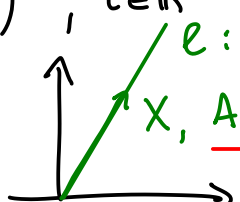
$$\begin{aligned} 0 \stackrel{?}{=} W &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} - \lambda \end{vmatrix} = (\frac{1}{2} - \lambda)(\frac{2}{3} - \lambda) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \lambda^2 - (\frac{2}{3} + \frac{1}{2})\lambda + \\ & \quad (\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{6}) = \lambda^2 - \frac{7}{6}\lambda + \frac{1}{6} \quad \leftarrow \text{wielomian charakterystyczny } A / F \\ & = (\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{6}) \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{ślad: } \text{tr } A = \frac{7}{6} \\ \rightarrow \text{wyznacznik: } \det A = \frac{1}{6} \end{array} \end{aligned}$$

Układ ma niezerowe rozwiązanie dla

$$\lambda = 1 \quad \leftarrow \text{wartości własne} \rightarrow \lambda = \frac{1}{6}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}p + \frac{1}{3}q = 0 \\ \frac{1}{2}p - \frac{1}{3}q = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}p = \frac{1}{3}q$$

wektory własne $\rightarrow \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$
 $\rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

 $X, AX = 1 \cdot X = X$

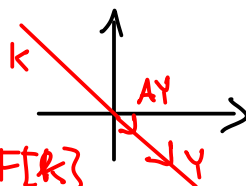
$$\begin{cases} \frac{1}{3}p + \frac{1}{3}q = 0 \\ \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q = 0 \end{cases}$$

$$p + q = 0$$

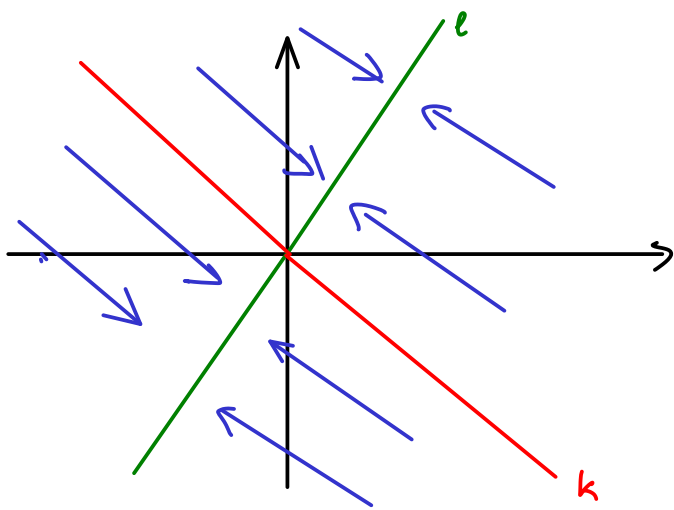
$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$k = F[k]$$



F:



$$AX = X, \quad X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$AY = \frac{1}{6}Y, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{100}X = X$$

$$A^{100}Y = \frac{1}{6^{100}} \cdot Y \quad (\approx 0)$$

$$A^{100} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha X + \beta Y$$

$\nwarrow$ $\nearrow$
 L_{H^2}

$$A^{100} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^{100}(\alpha X + \beta Y) = \alpha A^{100}X + \beta A^{100}Y = \alpha X + \frac{\beta}{6^{100}}Y \quad (\approx \alpha X)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta \\ 3\alpha - \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha - \beta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3\alpha = 1, \alpha = 1/5 \\ \beta = 3\alpha \end{cases} \quad \beta = 3/5$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}X + \frac{3}{5}Y$$

$$X_{100} = \begin{pmatrix} p_{100} \\ q_{100} \end{pmatrix} = A^{100} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3}{5 \cdot 6^{100}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot 6^{-100} \\ \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \cdot 6^{-100} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

O/p.

$$\begin{aligned} p_{100} &\approx 2/5 = 0,4 && \leftarrow \text{z dokładnością } \frac{3}{5} \cdot 6^{-100} \\ q_{100} &\approx 3/5 = 0,6 && \leftarrow \text{(50 miejsc po przecinku)} \end{aligned}$$

Definicje

- 1) Niezerowy wektor $U \in \mathbf{R}^2$ nazywamy *wektorem własnym* macierzy A / przekształcenia liniowego F , jeśli istnieje $\lambda \in \mathbf{R}$, taka że

$$AU = \lambda U \quad / \quad F(U) = \lambda U$$

- 2) Jeśli liczba rzeczywista λ ma tę własność, że istnieje **niezerowy** wektor $U \in \mathbf{R}^2$ spełniający

$$AU = \lambda U \quad / \quad F(U) = \lambda U$$

to nazywamy ją *wartością własną* macierzy A / przekształcenia F (odpowiadającą wektorowi własnemu U).

- 3) Wielomian $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix}$ nazywamy *wielomianem charakterystycznym* macierzy $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. χ chi

Wielomian charakterystyczny przekształcenia definiujemy jako wielomian charakterystyczny jego macierzy: $\chi_F(x) = \chi_{m(F)}(x)$.

- 4) Ślad macierzy $\text{tr}(A)$.

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-x)(d-x) - bc = x^2 - \underbrace{(a+d)}_{\text{tr } A} x + \underbrace{(ad-bc)}_{\text{det } A}$$

trace - ślad

Uwaga. $\chi_A(x) = \det(A - x \cdot I)$. Działania na macierzach.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A - xI = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix}$$

$$t \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta & tb \\ tc & td \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

$$(tF)(X) = t \cdot F(X)$$

$$(G+F)(X) = G(X) + F(X)$$

$$2 \cdot \sin x + 7 \cos x$$

Podstawowe własności

Fakt 1. λ jest wartością własną $A \iff \lambda$ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego A .

D-d: λ jest wartością własną $A \stackrel{\text{off}}{\iff} (\exists U \neq 0) (AU = \lambda U)$

$$\iff (\exists U \neq 0) ((A - \lambda I)U = 0)$$

$$\iff \text{Układ o macierzy głównej } A - \lambda I \text{ i zerowych prawych stronach}$$

$$\text{ma niezerowe rozwiązanie}$$

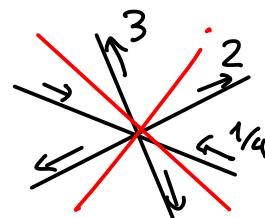
$$\implies \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\chi_A''(\lambda)$$

□

Wniosek. Macierz 2×2 ma co najwyżej dwie wartości własne.

$\chi_A(x)$ jest wielomianem stopnia 2, więc ma najwyżej dwa pierwiastki.



Fakt 2. Jeśli λ, η są dwiema różnymi wartościami własnymi A , zaś U, W odpowiadającymi im niezerowymi wektorami własnymi, to U, W są liniowo niezależne.

D-d: Gdyby nie, to

$$U = \alpha W$$

lub

$$W = \beta U \quad \text{analogicznie}$$

$$\lambda U = AU = A(\alpha W) = \alpha AW = \alpha \eta W = \eta(\alpha W) = \eta U$$

$$\lambda U = \eta U$$

$$(\lambda - \eta)U = 0$$

$$\begin{matrix} \neq & \neq \\ 0 & 0 \end{matrix} \quad \text{sprzeczność.}$$

□

Twierdzenie. (o diagonalizacji).

Założmy, że U_1, U_2 są liniowo niezależnymi wektorami własnymi macierzy A odpowiadającymi wartościami własnym λ_1, λ_2 . Wtedy

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

gdzie P jest macierzą o kolumnach U_1, U_2 .

Definicja. Macierz postaci $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$ nazywamy *diagonalną*. Macierz A jest *diagonalizowalna*, jeśli $A = PDP^{-1}$ dla pewnej diagonalnej macierzy D i pewnej odwracalnej macierzy P .

D-d:

$$A U_1 = \lambda_1 U_1$$

$$A U_2 = \lambda_2 U_2$$

$$\begin{aligned} AP = A(U_1, U_2) &= (AU_1, AU_2) = (\lambda_1 U_1, \lambda_2 U_2) = (U_1, U_2) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= P \cdot D \end{aligned}$$

$$AP = PD \quad / \cdot P^{-1}$$

$$A = PDP^{-1}$$

← dlaczego P jest odwracalna?

$$\det P = \det(U_1, U_2) \neq 0$$

bo U_1, U_2 są lnz

□

Wniosek. Jeśli macierz (rozmiaru 2×2) ma dwie różne wartości własne, to jest diagonalizowalna.

Dowód. Niech λ_1, λ_2 będą dwoma różnymi wartościami własnymi A .

Niech U_1, U_2 będą niezerowymi odpowiadającymi im wektorami własnymi.

Z Faktu 2 wiemy, że U_1, U_2 są lnz. Tw. o diagonalizacji stosuje się.

Przykład.

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Potęgowanie macierzy diagonalnej

$$(PDP^{-1})^{100} = P \cancel{D} P^{-1} \cancel{P} \cancel{D} P^{-1} \cancel{P} \cancel{D} P^{-1} \dots \cancel{D} P^{-1} \cancel{P} \cancel{D} P^{-1} = P D^{100} P^{-1}$$

Przykład.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}^{100} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}^{100} P^{-1} =$$