

Uwaga. Pokazaliśmy więcej: każda izometria trzymająca zero jest postaci R_θ lub $R_\theta \circ S_x$.

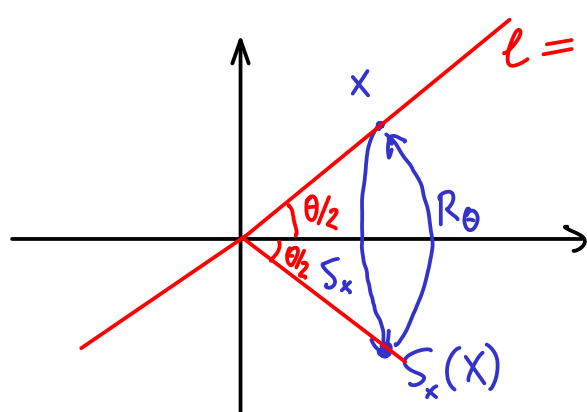
A co z S_ℓ ?

Fakt.

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

$$\{R_\theta \circ S_x \mid \theta \in \mathbf{R}\} = \{S_\ell \mid 0 \in \ell\}$$

Dowód: Rozważmy $R_\theta \circ S_x$. Jeśli to jest S_ℓ , to dla $x \in \ell$ musi zachodzić $R_\theta \circ S_x(x) = x$.



$$\ell = R_{\theta/2}[OX]$$

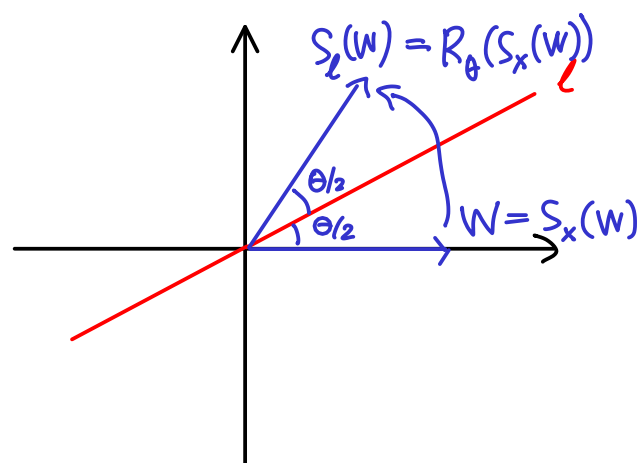
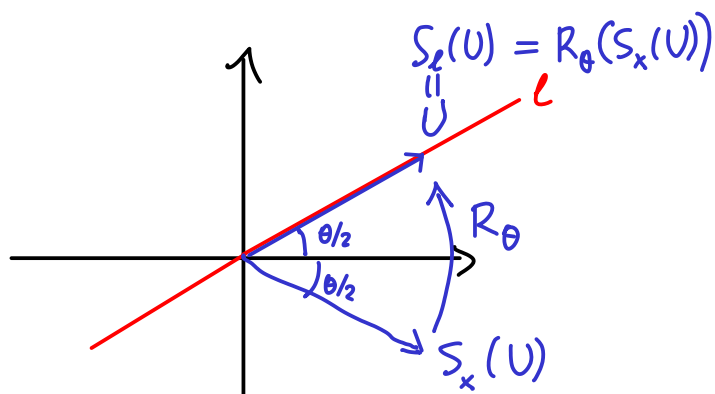
Niech $\ell = R_{\theta/2}[OX]$.

Pokażemy, że $R_\theta \circ S_x = S_\ell$.

W tym celu dobierzemy dwa linz wektory U, W i sprawdzimy, że

$$R_\theta \circ S_x = S_\ell \iff$$

$$R_\theta \circ S_x(U) = S_\ell(U), R_\theta \circ S_x(W) = S_\ell(W).$$



$$R_\theta \circ S_x = S_{R_{\theta/2}[OX]}$$

Każde S_ℓ ($\ell > 0$) jest postaci $R_\theta \circ S_x$, bo $\ell = R_{\theta/2}[OX]$ dla odpowiednio dobrego θ .

□

Macierze izometrii liniowych

$$m(R_\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$m(R_\theta \circ S_x) = m(R_\theta)m(S_x) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\det R_\theta = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

↑
macierz symetrii osiowej
o osi nachylonej do OX
pod kątem $\theta/2$.

$$\det R_\theta \circ S_x = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{vmatrix} = -\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = -1$$

Fakt. Liniowa izometria F płaszczyzny $\mathbf{R}^2$ jest

obrotem $\iff \det F > 0$

($\iff \det F = +1$)

symetrią $\iff \det F < 0$.

($\iff \det F = -1$)

odbicie

→

symetrią $\iff \det F < 0$.

(symetria
osiowa)

$\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$ – macierz
symetrii

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – macierz
obrotu

Twierdzenie. Niech $A \in M_{2 \times 2}(\mathbf{R})$. Następujące warunki są równoważne.

1. A jest macierzą izometrii liniowej.
2. $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ lub $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ dla pewnego $\theta \in \mathbf{R}$.
3. kolumny A są prostopadłe i mają długość 1.
- 3'. $A^\top A = I$
4. wiersze A są prostopadłe i mają długość 1.
- 4'. $AA^\top = I$.

Notacja: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Dowód twierdzenia.

(1 $\iff$ 2) było.

(2 $\Rightarrow$ 3) Niech $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \overset{+}{-}\sin \theta \\ \sin \theta & \overset{-}{+}\cos \theta \end{pmatrix}$. Kolumny A : $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overset{+}{-}\sin \theta \\ \overset{-}{+}\cos \theta \end{pmatrix}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overset{+}{-}\sin \theta \\ \overset{-}{+}\cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle = \cos \theta \cdot (\overset{+}{-}\sin \theta) + \sin \theta \cdot \overset{-}{+}\cos \theta = 0$$

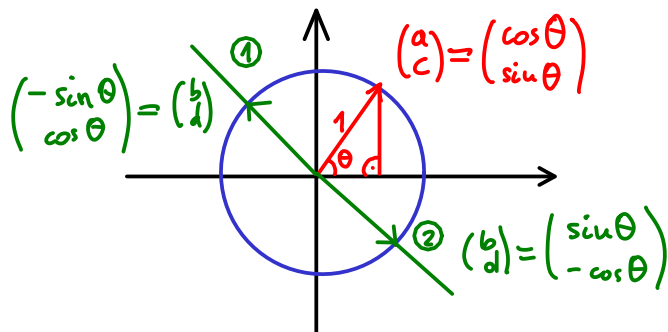
$$\left\| \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$$

$$\left\| \begin{pmatrix} \overset{+}{-}\sin \theta \\ \overset{-}{+}\cos \theta \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(\overset{+}{-}\sin \theta)^2 + (\overset{-}{+}\cos \theta)^2} = 1$$

Przypadek $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ linijowy analogicznie

(2 $\Rightarrow$ 4) Analogicznie.

$$(3 \Rightarrow 2) \text{ Załóżmy, że } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{matrix} U & W \\ \downarrow & \downarrow \\ a & b \\ c & d \end{matrix}, \begin{matrix} \|U\|^2=1 \\ \downarrow \\ a^2+c^2=1 \end{matrix}, \begin{matrix} \|W\|^2=1 \\ \downarrow \\ b^2+d^2=1 \end{matrix}, \begin{matrix} \langle U, W \rangle = 0 \\ \downarrow \\ ab+cd=0 \end{matrix}.$$



$$\textcircled{1} A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

(4 $\Rightarrow$ 2) Analogicznie.

$$\textcircled{1} A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \quad \textcircled{2} A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

(3 $\iff$ 3')

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} \stackrel{(3')}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2+c^2=1 \\ ab+cd=0 \\ b^2+d^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} \|(a, c)\|=1 \\ \langle (a, c), (b, d) \rangle = 0 \iff (3) \\ \|(b, d)\|=1 \end{cases}$$

(4 $\iff$ 4') Analogicznie:

$$A A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} \dots$$

□

Przykład. Jeśli $\begin{pmatrix} 1/3 & * \\ * & * \end{pmatrix}$ jest macierzą izometrii, to

(liniowej, skoro w ogóle ma macierz)

Lewa kolumna ma długość 1: $(\frac{1}{3})^2 + x^2 = 1$, $x^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$, $x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1/3 & y \\ 2\sqrt{2}/3 & * \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1/3 & y \\ -2\sqrt{2}/3 & * \end{pmatrix} & \leftarrow \text{Pierwsza wiersz ma długość 1: } y = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \swarrow \quad \searrow & \swarrow \quad \searrow & \swarrow \quad \searrow \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & -1/3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1/3 & -2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1/3 & 2\sqrt{2}/3 \\ -2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1/3 & -2\sqrt{2}/3 \\ -2\sqrt{2}/3 & -1/3 \end{pmatrix} \\ \text{symetria} & \text{obrót} & \text{obrót} & \text{symetria} \end{array}$$

Wniosek. Jeśli A jest macierzą izometrii, to A jest odwracalna i $A^{-1} = A^T$.

Przykład.

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & -1/3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & -1/3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1/3 & 2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

macierz izometrii!

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1/3 & 2\sqrt{2}/3 \\ -2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

macierz izometrii!

Izometrie nieliniowe

Fakt.

Każda izometria płaszczyzny jest postaci $T_U \circ R_\theta$ lub $T_U \circ S_\ell$ (ℓ – prosta przez 0).

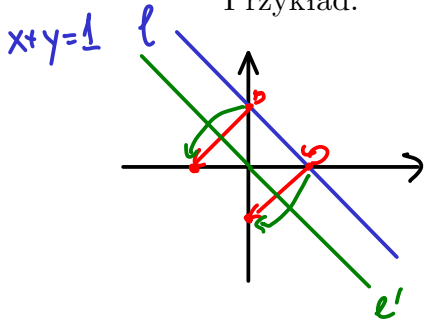
Definicja.

Przekształcenie postaci $T_U \circ L$, L liniowe, nazywamy *przekształceniem afinicznym*.

(Inny opis: $X \mapsto AX + U$, gdzie $A \in M_{2 \times 2}(\mathbf{R})$, $U \in \mathbf{R}^2$.)

L nazywamy *częścią liniową* przekształcenia afinicznego $T_U \circ L$.

Przykład.



$$S_\ell = T_{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \circ F', \quad m(F') = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = m(S_{\ell'})$$

$$F' = S_{\ell'}$$

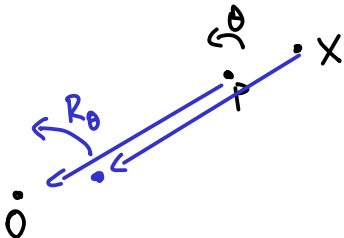
S_ℓ jest p. afinicznym o części liniowej $S_{\ell'}$

Fakt.

- Częścią liniową obrotu o kąt θ (wokół jakiegokolwiek punktu) jest R_θ .
- Częścią liniową odbicia w prostej k jest odbicie w prostej ℓ równoległej do k i przechodzącej przez 0.

D-d:

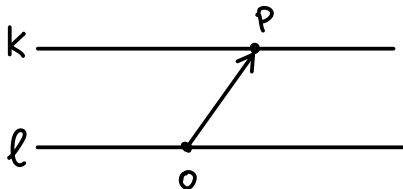
$$a) \quad R_{p,\theta} = T_p \circ R_\theta \circ T_{-p}$$



$$R_{p,\theta}(X) = T_p \circ R_\theta \circ T_{-p}(X) = p + R_\theta(X - p) = \\ = \underbrace{R_\theta X}_L + \underbrace{(p - R_\theta p)}_U$$

$$R_{p,\theta} = T_U \circ L$$

b) Podobnie



$$S_k = T_p \circ S_\ell \circ T_{-p}; \quad S_k(X) = \underbrace{S_\ell X}_L + \underbrace{(p - S_\ell p)}_U$$

$$S_k = T_U \circ L$$

□

Fakt.

Część liniowa złożenia przekształceń afinicznych jest złożeniem ich części liniowych.

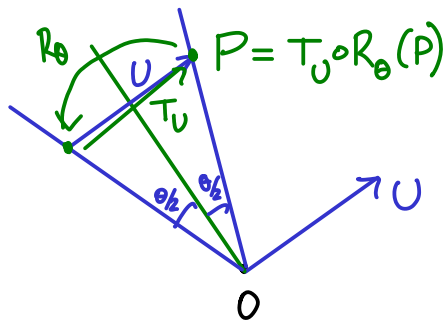
$$X \xrightarrow{L_1 X + U_1} L_1 X + U_1 \xrightarrow{L_2 X + U_2} L_2(L_1 X + U_1) + U_2 = \underbrace{L_2 L_1 X}_L + \underbrace{(L_2 U_1 + U_2)}_U$$

Twierdzenie.

Przekształcenie $T_U \circ R_\theta$ jest obrotem wokół pewnego punktu (o kąt θ) lub translacją (jeśli $R_\theta = \text{Id}$).

Przekształcenie $T_U \circ S_\ell$ (ℓ – prosta przez 0) jest symetrią z poślizgiem (zwykłą symetrią, jeśli $U \perp \ell$).

D-d: $T_U \circ R_\theta$: szukamy P trzymanego przez to przekształcenie.



$$R_{P,\theta}(X) = T_P \circ R_\theta \circ T_{-P}(X) = R_\theta X + (P - R_\theta P) =$$

$$P - R_\theta P = T_U \circ R_\theta(P) - R_\theta(P) = U + R_\theta(P) - R_\theta(P) = U$$

$$= R_\theta X + U = (T_U \circ R_\theta)(X)$$

$$T_U \circ R_\theta = R_{P,\theta}$$