

Orientacja pary wektorów

Tw. Załóżmy, że wektory U, W są lnz.

- $\det(U, W) > 0 \iff$ obrót od U do W o najmniejszym kącie jest przeciwwzegarowy.
- $\det(U, W) < 0 \iff$ obrót od U do W o najmniejszym kącie jest zegarowy.

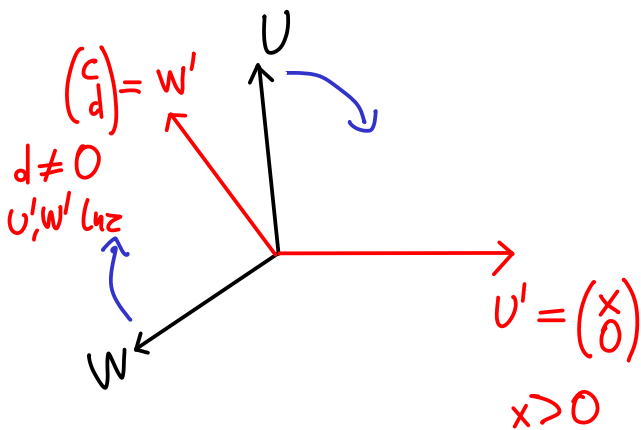
Definicja. Uporządkowaną parę wektorów (U, W) nazywamy *dodatnio zorientowaną* jeśli spełnia równoważne warunki z 1., a *ujemnie zorientowaną* jeśli spełnia warunki z 2.

Dowód Twierdzenia.

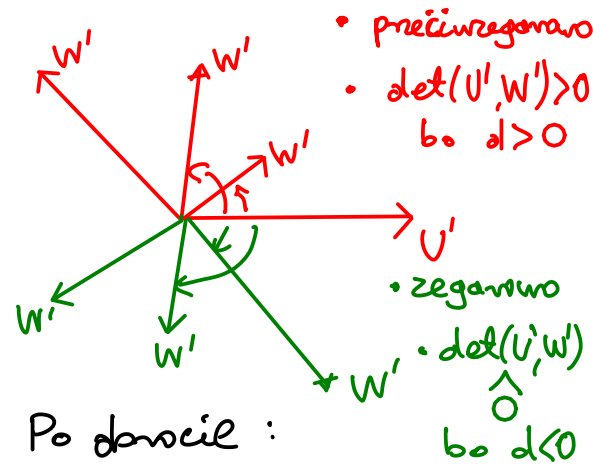
Obracamy parę (U, W) do takiej pozycji, w której wektor U jest skierowany w stronę dodatniej półosi OX . Wektory otrzymane po obrocie oznaczmy przez (U', W') .

W trakcie obracania nie zmienia się $\det(U, W)$, ani też zęgarowość najkrótszego kąta obrotu.

Na koniec mamy $U' = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $x > 0$, oraz $W' = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $d \neq 0$. Wtedy też $\det(U', W') = xd$ ma taki sam znak jak liczba d .



$$\det(U', W') = \begin{vmatrix} x & c \\ 0 & d \end{vmatrix} = xd$$



Pred obrotem :

$$\det(U, W) > 0$$

$\iff$

przeciwwzgarowość kąta
od U do W

$\iff$

Po obrocie :

$$\det(U', W') > 0$$

$\iff$

przeciwwzgarowość kąta
od U' do W'

□

Fakt – Definicja.

Jeśli $\det F > 0$, to F przeprowadza:

dodatnio zorientowane pary wektorów na dodatnio zorientowane pary wektorów;

ujemnie zorientowane pary wektorów na ujemnie zorientowane pary wektorów.

Mówimy, że F zachowuje orientację.

Jeśli $\det F < 0$, to F przeprowadza:

dodatnio zorientowane pary wektorów na ujemnie zorientowane pary wektorów;

ujemnie zorientowane pary wektorów na dodatnio zorientowane pary wektorów.

Mówimy, że F zmienia orientację.

Dowód.

$$\det AB = \det A \cdot \det B$$

$$\det(F(U), F(W)) = \det(m(F)U, m(F)W) = \det(m(F)(U, W)) = \det(m(F)) \det(U, W) = \det F \det(U, W)$$

$$\det(F(U), F(W)) = \det F \cdot \det(U, W)$$

+

—

—

+

+

+

—

—

+

—

+

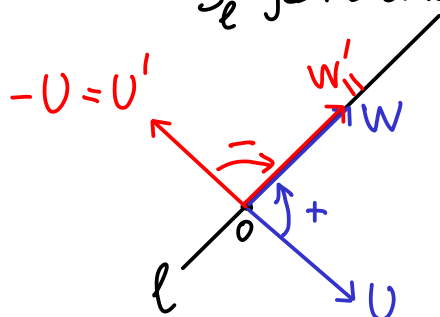
—

$$\det AB = \det A \cdot \det B$$

$$\det(F \circ G) = \det F \cdot \det G$$

Przykład. ℓ – prosta przez 0.
 $\det(S_\ell) = -1$

S_ℓ jest izometrią, zachowuje pda – zatem $\det S_\ell = \pm 1$



(U, W) + zorientowana
 (U', W') – zorientowana
 $(S_\ell(U), S_\ell(W))$

$\Rightarrow S_\ell$ zmienia orientację.
 $\det S_\ell < 0$

$$\det S_\ell = -1$$

Izometrie płaszczyzny

Odległość punktów $x, y \in \mathbf{R}^2$ będziemy oznaczać $\|x - y\|$ lub $d(x, y)$.

Definicja. *Izometrią płaszczyzny* nazywamy przekształcenie $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ spełniające

$$(\forall x, y \in \mathbf{R}^2) \quad (d(F(x), F(y)) = d(x, y))$$

Przykłady.

1. Obróty
2. Translacje
3. Odbicia (symetrie)
4. Identyteta
5. ... i ich złożenia !

Złożenie izometrii jest izometrią.

Jeśli F, G są izometriami, to $F \circ G$ też:

$$d((F \circ G)(x), (F \circ G)(y)) = d(F(G(x)), F(G(y))) \stackrel{\substack{\text{F-izometria} \\ \downarrow}}{=} d(G(x), G(y)) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{G-izometria}}}{=} d(x, y)$$

Fakt 1. Każda izometria F płaszczyzny $\mathbf{R}^2$ jest złożeniem pewnej izometrii trzymającej 0 i pewnej translacji:

$$(\exists U \in \mathbf{R}^2)(\exists F' - \text{izometria } \mathbf{R}^2)(F'(0) = 0 \wedge F = T_U \circ F').$$

Dowód:

$$F(0) = T_U \circ F'(0) = U + F'(0) = U + 0 = U$$

Niech $U = F(0)$. Niech $F' = T_{-U} \circ F$.

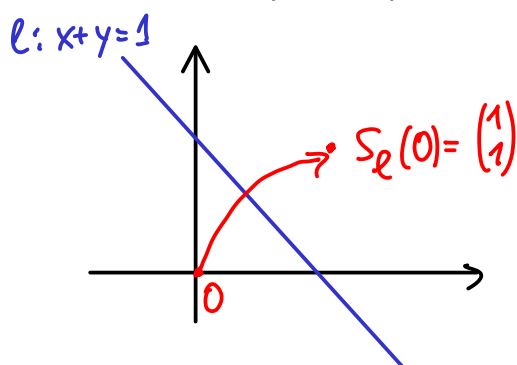
F' jest izometrią, jako złożenie izometrii (T_{-U} i F).

$$F'(0) = (T_{-U} \circ F)(0) = T_{-U}(F(0)) = -U + F(0) = -F(0) + F(0) = 0$$

$$T_U \circ F' = T_U \circ T_{-U} \circ F = Id \circ F = F$$

□

Przykład. Symetria S_ℓ względem prostej ℓ o równaniu $x + y = 1$.



$$S_\ell = T_U \circ F', \quad U = S_\ell(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

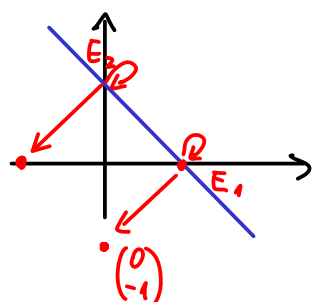
$$F' = T_{-U} \circ S_\ell = T_{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}} \circ S_\ell$$

$$F' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + S_\ell \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dots$$

Twierdzenie. Izometria płaszczyzny trzymająca zero jest liniowa.

Przykład, cd.

F' jest liniowe – wystarczy znaleźć macierz $m(F')$; jej kolumnami są $F'(E_1)$, $F'(E_2)$.



$$F' = T_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \circ S_\ell \quad F'(E_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_\ell(E_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F'(E_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + S_\ell(E_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$m(F') = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

$$S_\ell \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (T_0 \circ F') \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + F'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y \\ 1-x \end{pmatrix}$$

Lemat. Załóżmy, że F jest trzymającym zero przekształceniem płaszczyzny. Wtedy:
 F jest izometrią $\iff F$ zachowuje iloczyn skalarny.

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^2) (\langle F(x), F(y) \rangle = \langle x, y \rangle)$$

Dowód.

($\Leftarrow$)

$$\begin{aligned} d(F(x), F(y))^2 &= \|F(x) - F(y)\|^2 = \langle F(x) - F(y), F(x) - F(y) \rangle \\ &= \langle F(x), F(x) \rangle - 2\langle F(x), F(y) \rangle + \langle F(y), F(y) \rangle \\ &\stackrel{F \text{ zachowuje } \langle, \rangle}{=} \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \|x - y\|^2 = d(x, y)^2 \end{aligned}$$

bo F zachowuje $\langle, \rangle$

$\|F(x)\|^2 - 2\langle F(x), F(y) \rangle + \|F(y)\|^2$

($\Rightarrow$)

$$\langle F(x), F(y) \rangle = -\frac{1}{2}(\|F(x) - F(y)\|^2 - \|F(x)\|^2 - \|F(y)\|^2)$$

$$= -\frac{1}{2} (d(F(x), F(y))^2 - d(F(x), 0)^2 - d(F(y), 0)^2)$$

$$= -\frac{1}{2} (d(\cancel{F(x)}, \cancel{F(y)})^2 - d(\cancel{F(x)}, \cancel{F(0)})^2 - d(\cancel{F(y)}, \cancel{F(0)})^2)$$

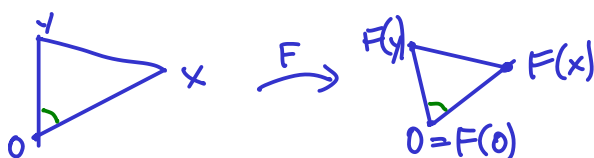
F -izom!

$$= -\frac{1}{2} (d(x, y)^2 - d(x, 0)^2 - d(y, 0)^2)$$

$$= -\frac{1}{2} (\|x - y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

$$= \langle x, y \rangle$$

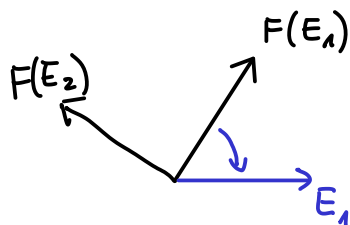
□



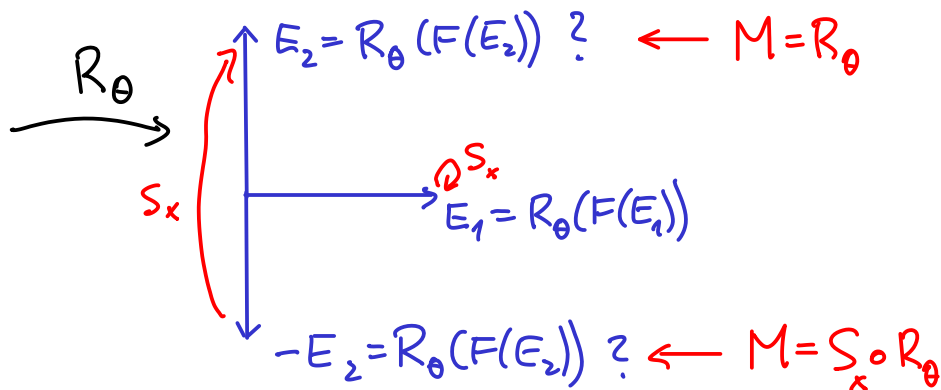
Dowód twierdzenia. Niech F będzie trzymającą zero izometrią $\mathbf{R}^2$.

Z lematu wiemy, że F zachowuje iloczyn skalarny.

1. $\|F(E_1)\| = 1$, $\|F(E_2)\| = 1$, $F(E_1) \perp F(E_2)$.
2. Istnieje izometria liniowa M (postaci R_θ lub $S_\ell \circ R_\theta$), taka że $(M \circ F)(E_1) = E_1$, $(M \circ F)(E_2) = E_2$.



Dobieramy θ tak, by $R_\theta(F(E_1)) = E_1$



3. Niech $G = M \circ F$. Wtedy G zachowuje iloczyn skalarny, $G(0) = 0$, $G(E_1) = E_1$, $G(E_2) = E_2$.

4. $G = \text{Id}$.

$\langle \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = a \rightarrow$ Pierwsza współrzędna $G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \langle G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, E_1 \rangle = \langle G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, G(E_1) \rangle = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, E_1 \rangle = x$.

Druga współrzędna $G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \langle G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, E_2 \rangle = \langle G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, G(E_2) \rangle = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, E_2 \rangle = y$.

$$G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

5. $R_\theta \circ F = \text{Id}$

lub

$$S_x \circ R_\theta \circ F = \text{Id}$$

$$F = R_{-\theta} \circ \text{Id} = R_{-\theta}$$

$$S_x \circ R_\theta \circ F = S_x \circ \text{Id} = S_x$$

$$R_{-\theta} \circ F = R_{-\theta} \circ S_x$$

liniowe

□