

Czym może być krzywa stopnia 2 zadana równaniem

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0 \quad ?$$

$$(a, b \text{ lub } c \neq 0)$$

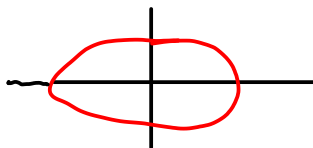
Równanie w postaci (prawie) kanonicznej:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1, \quad \alpha x^2 + \beta y^2 = 0$$

$\swarrow$ $\searrow$ Zadanie

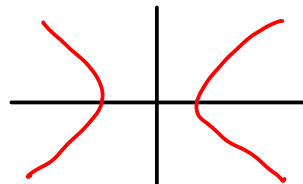
1) $\alpha, \beta > 0$ – elipsa

$$\left(\frac{x}{1/\sqrt{\alpha}}\right)^2 + \left(\frac{y}{1/\sqrt{\beta}}\right)^2 = 1$$

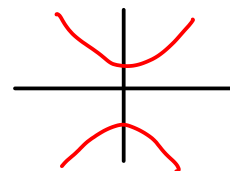


2) $\alpha > 0 > \beta$ – hiperbola

$$\left(\frac{x}{1/\sqrt{\alpha}}\right)^2 - \left(\frac{y}{1/\sqrt{-\beta}}\right)^2 = 1$$



3) $\alpha < 0 < \beta$ – hiperbola

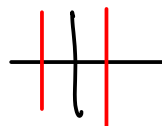


4) $\alpha, \beta < 0$ – pusta krzywa, $\emptyset$



5) $\alpha > 0, \beta = 0$ – dwie proste

($\alpha = 0, \beta > 0$ – też)



6) $\alpha < 0, \beta = 0$ – pusta krzywa, $\emptyset$

($\alpha = 0, \beta < 0$ – tak samo)



[?] $\alpha = \beta = 0$ – nie zadana się gdy a, b lub $c \neq 0$

Fakt. Niech $X' = P^{-1}X$ będzie liniowym (niekoniecznie prostokątnym) układem współrzędnych, zaś A macierzą 2×2 .

a) Jeśli F jest przekształceniem liniowym o macierzy A w standardowych współrzędnych X , to macierzą F w nowych współrzędnych X' jest $P^{-1}AP$.

b) Jeśli Q jest formą kwadratową o macierzy A w standardowych współrzędnych X , to macierzą Q w nowych współrzędnych X' jest P^TAP .

$$X^TAX = (PX')^TAPX' = (X')^T \underbrace{P^TAP}_{\text{symetryczna}} X'$$

$$\uparrow \text{symetryczna: } (P^TAP)^T = P^T A^T (P^T)^T = P^TAP$$

Co robić, gdy w równaniu są wyrazy liniowe?

$$(**) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

Potrzebujemy wtedy nieliniowych (afinicznych) prostokątnych układów współrzędnych.

Definicja. Para funkcji (x', y') z $\mathbf{R}^2$ w $\mathbf{R}$ tworzy *prostokątny układ współrzędnych*, jeśli

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + V$$

dla pewnej macierzy izometrii P i pewnego wektora V . (Jeśli zachodzi powyższy wzór, to izometria $T_V \circ F_P$ przeprowadza osie OX, OY na osie OX', OY' .)

Ogólna strategia radzenia sobie z równaniem (**):

- 1) Diagonalizujemy część kwadratową; przeliczamy na nowe współrzędne wyrazy liniowe.
- 2) Uzupełniamy do kwadratu – o ile się da.

Przykład 1. $4xy + x + 2y + 1 = 0$.

Krok 1: $Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, m(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = A, \chi_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 2 \\ 2 & -x \end{vmatrix} = x^2 - 4$

We wsp. (x', y') związanych z
bazą (U, W) równanie krzywej
będzie takie:

$$2(x')^2 - 2(y')^2 + \dots + 1 = 0$$

$$x + 2y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y'$$

Pełne równanie we wsp. (x', y') :

$$2(x')^2 - 2(y')^2 + \frac{3}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y' + 1 = 0$$

Krok 2 Uzupełnianie do kwadratu:

$$\underbrace{2(x')^2 + \frac{3}{\sqrt{2}} x' - 2(y')^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} y' + 1}_{=0} = 0$$

$$\lambda = 2, \mu = -2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

jednostkowy:

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow W = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad P\text{-macierz izometrii,} \quad P^{-1} = P^T = P$$

$$x = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$$

$$U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

$$2 \left[(x')^2 + 2 \cdot \frac{3}{4\sqrt{2}} \cdot x' + \left(\frac{3}{4\sqrt{2}} \right)^2 \right] - 2 \left[(y')^2 + 2 \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}} y' + \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \right)^2 \right] + 1 - 2 \left(\frac{3}{4\sqrt{2}} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \right)^2 = 0$$

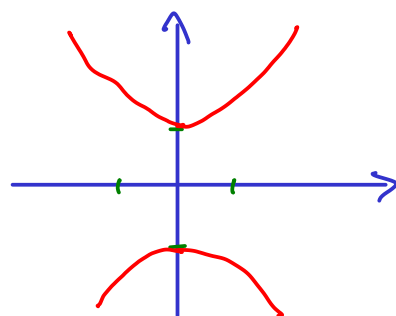
$$2 \left[\underbrace{x' + \frac{3}{4\sqrt{2}}}_{x''} \right]^2 - 2 \left[\underbrace{y' + \frac{1}{4\sqrt{2}}}_{y''} \right]^2 + 1 - 2 \cdot \frac{9}{32} + 2 \cdot \frac{1}{32} = 0$$

$$1 - \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$2(x'')^2 - 2(y'')^2 + \frac{1}{2} = 0 \quad / \cdot (-2)$$

$$-4(x'')^2 + 4(y'')^2 = 1$$

$$-\left(\frac{x''}{\frac{1}{2}} \right)^2 + \left(\frac{y''}{\frac{1}{2}} \right)^2 = 1 \quad - \text{hiperbola}$$



Zamiana współrzędnych:

$$x'' = x' + \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{x+y}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4\sqrt{2}}$$

$$y'' = y' + \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{x-y}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

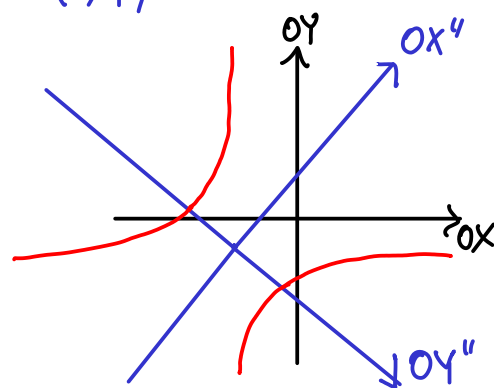
$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{P (=P^{-1})} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} \frac{3}{4\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} \frac{3}{4\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4\sqrt{2} \\ 1/4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4/4\sqrt{2} \\ 2/4\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$



Przykład 2. $\underbrace{4x^2 + 4xy + y^2}_{(2x+y)^2} + 2x - y - 1 = 0.$

Chcielibyśmy podstawić $x' = 2x + y$, ale nie możemy, bo to nie jest część izometrycznej zmiany współrzędnych. Zamiast tego:

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y \\ y' = -\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$$

$$Q\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = (2x+y)^2 = (\sqrt{5}x')^2 = 5(x')^2$$

$$5(x')^2 + 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) - 1 = 0$$

$$5(x')^2 + \frac{3}{\sqrt{5}}x' - \frac{4}{\sqrt{5}}y' - 1 = 0$$

Krok 2 $5\left[(x')^2 + 2 \cdot \frac{3}{10\sqrt{5}}x' + \left(\frac{3}{10\sqrt{5}}\right)^2\right] - \frac{4}{\sqrt{5}}y' - 1 - 5 \cdot \left(\frac{3}{10\sqrt{5}}\right)^2 = 0$

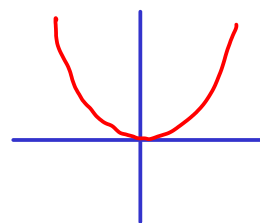
$$5\left[\underbrace{x' + \frac{3}{10\sqrt{5}}}_{x''}\right]^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}y' - 1 - \frac{9}{100} = 0$$

$$5(x'')^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}y' - 1,09 = 0$$

$$5(x'')^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}\left(\underbrace{y' + \frac{1,09 \cdot \sqrt{5}}{4}}_{y''}\right) = 0$$

$$5(x'')^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}y'' = 0$$

$$y'' = \frac{5\sqrt{5}}{4}(x'')^2 \leftarrow \text{kanoniczna postać równania paraboli}$$



Ciągi zadane rekurencyjnie

Rozważymy ciągi $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ opisane rekurencją stopnia 2:

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n, \quad x_0, x_1 - \text{dane.}$$

Przykład: Ciąg Fibonacciego $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $f_0 = 0$, $f_1 = 1$.

Chcemy umieć coś powiedzieć o wielkości dalekiego wyrazu ciągu (np. f_{1000}) bez liczenia wszystkich wcześniejszych wyrazów.

Przetłumaczmy problem na język wektorów i macierzy i użyjemy diagonalizacji macierzy.

Niech $X_n = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}$. Wtedy

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_{n+1} + bx_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = AX_n$$

Zatem:

$$X_n = A^n X_0$$

Wielomian charakterystyczny A :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 - ax - b$$

Jeśli ma on dwa pierwiastki λ, μ to A diagonalizuje się: $A = PDP^{-1}$ z $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Wtedy

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = X_n = A^n X_0 &= (PDP^{-1})^n X_0 = P D^n P^{-1} X_0 = P \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} P^{-1} X_0 = \\ &= \underbrace{P}_{\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} \underbrace{P^{-1} X_0}_{\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^n g \\ \mu^n h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ eg\lambda^n + fh\mu^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$x_n = eg\lambda^n + fh\mu^n$$

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= ax_{n+1} + bx_n \\ x^{n+2} &= ax^{n+1} + bx^n \quad / : x^n \\ x^2 &= ax + b \\ x^2 - ax - b &= 0 \end{aligned}$$

Twierdzenie.

Rozważmy ciąg (x_n) spełniający rekurencję

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n.$$

Jeśli równanie charakterystyczne tej rekurencji $x^2 - ax - b = 0$ ma dwa różne rozwiązania λ, μ , to ciąg można opisać wzorem postaci

$$x_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$$

gdzie α, β zależą od wartości a, b oraz x_0, x_1 (ale nie od n).

Przykład: ciąg Fibonacciego. Równanie charakterystyczne:

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \leftarrow \begin{array}{l} f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \\ x^2 = x + 1 \end{array}$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Z twierdzenia: $f_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \alpha, \beta = ?$

$$\begin{array}{l} n=0: \\ n=1: \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = f_0 = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = \alpha + \beta \\ 1 = f_1 = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}(\alpha-\beta) = \frac{\sqrt{5}}{2}(\alpha-\beta) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad 2\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right] \quad (\text{wzór Bineta})$$

Wniosek

$$\left| f_n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < 1$$

Przykład:

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - 7x_n, \quad x_0 = 0, x_1 = 1$$

równanie charakterystyczne:

$$x^2 = 4x - 7, \quad x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3$$

$$(x-2)^2 = -3$$

$$x-2 = \pm \sqrt{-3} = \pm \sqrt{3} \sqrt{-1} = \pm \sqrt{3} i$$

↑ jednostka urojona: i