

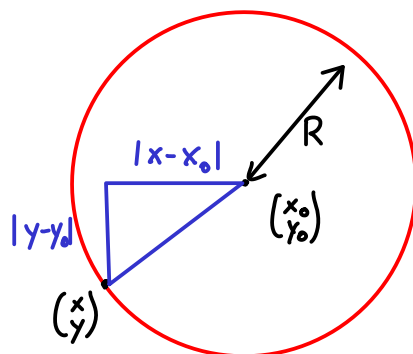
Krzywe stopnia 2 (stożkowe)

to krzywe zadane równaniem postaci

$$(*) \quad \underbrace{ax^2 + 2bxy + cy^2}_{\text{wyrazy kwadratowe (stopnia 2)}} + \underbrace{2dx + 2ey}_{\text{wyrazy liniowe (stopnia 1)}} + \underbrace{f}_{\text{wyraz wolny}} = 0 \quad (a, b, \text{ lub } c \neq 0)$$

Przykłady.

$$1) \quad \underbrace{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}_{\text{kwadrat odległości (x) od (x_0, y_0)}} = R^2$$



$$\underbrace{x^2 + y^2}_{d^2} - \underbrace{2x_0x - 2y_0y}_{e^2} + \underbrace{x_0^2 + y_0^2 - R^2}_{f} = 0$$

$d = -x_0, e = -y_0$

Równanie opisuje okrąg o środku (x_0, y_0) i promieniu R .

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) + 4 = 0$$

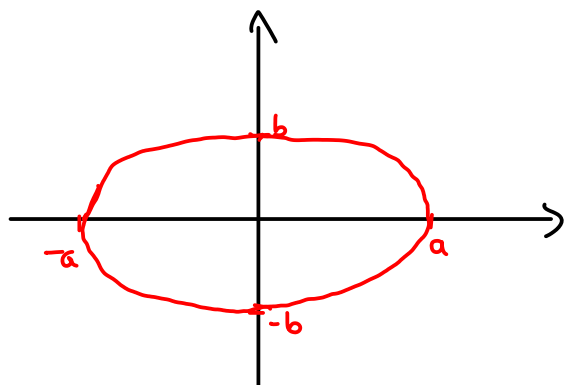
$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = -4 \quad \leftarrow \text{brak rozwiązań - "pusta krzywa"}$$

Okrąg o środku $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ i promieniu 2.

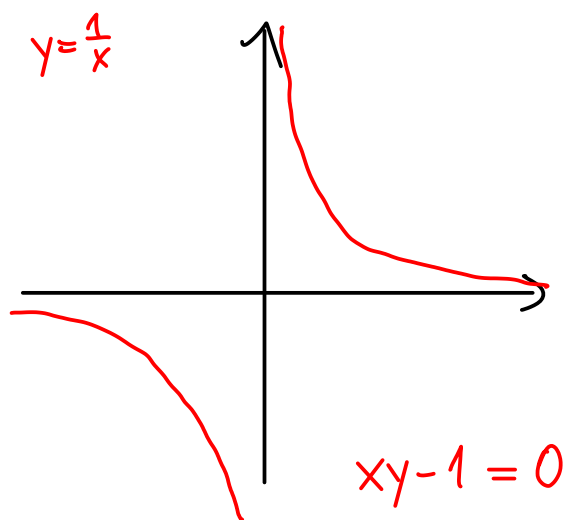
2) Elipsa: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ ($a, b > 0$)

(obraz okręgu $x^2 + y^2 = 1$ przez p. liniowe o macierzy $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$)

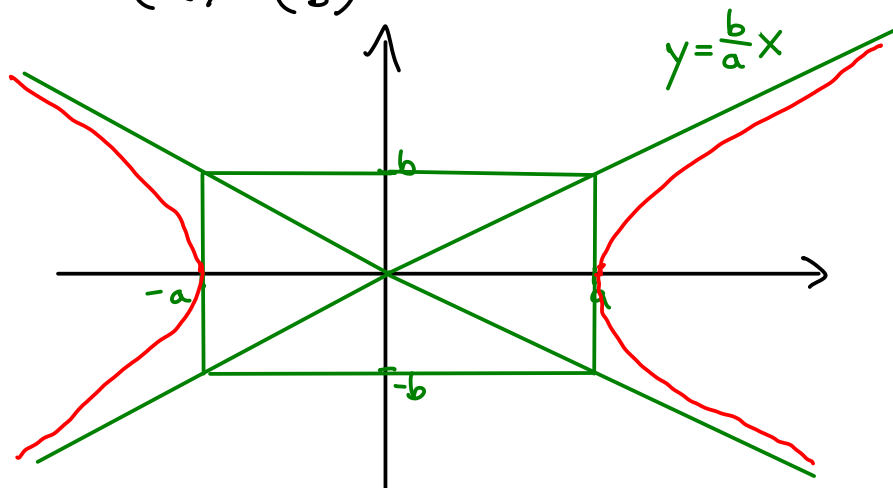
Elipsa o półosiach a, b .



3) Hiperbola:



$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$



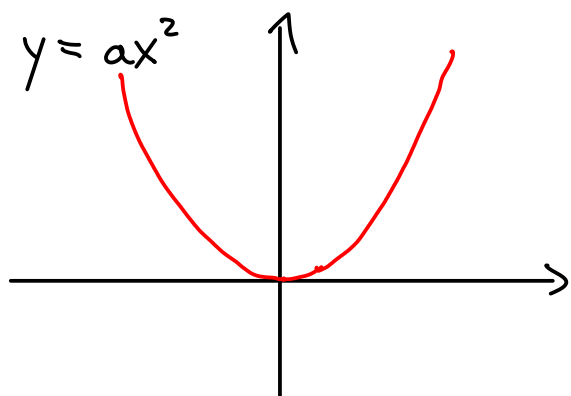
$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1, \quad y = b \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2 - b^2}$$

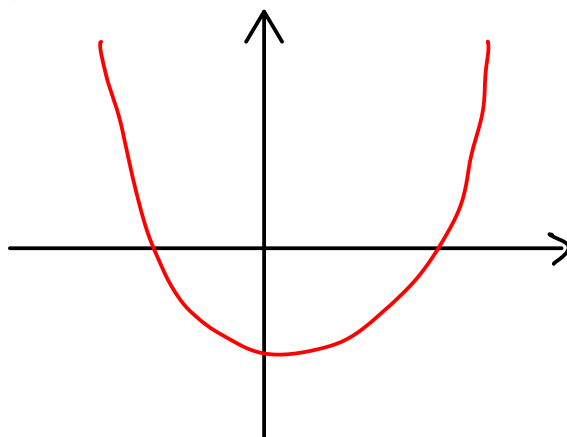
$\forall \leftarrow$ dla dużych x

$$\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2} = \frac{b}{a} x$$

4) Parabola



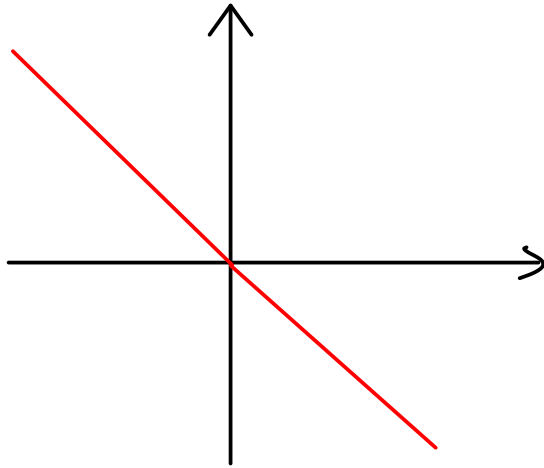
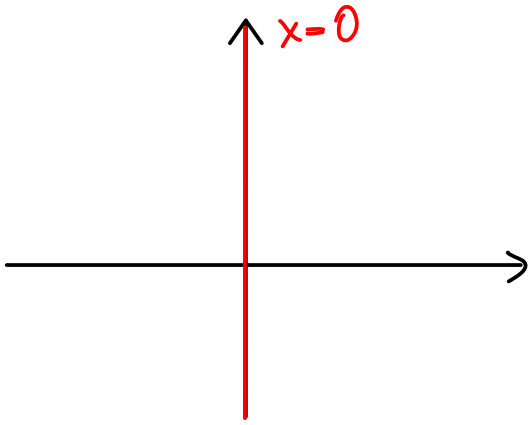
$$y = ax^2 + bx + c$$



$$5) \quad x^2 = 0$$

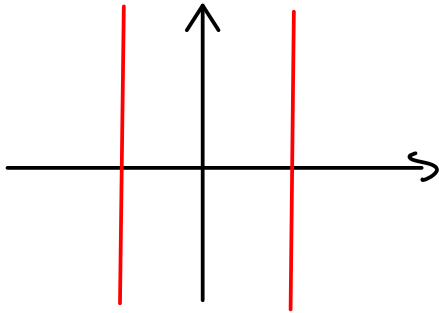
$$(x+y)^2 = 0$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 0$$

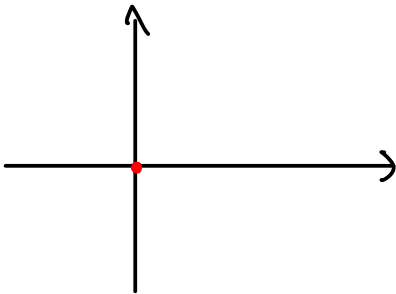


$$6) \quad x^2 = 1 \leadsto x^2 - 1 = 0, (x-1)(x+1) = 0$$

$$x = 1 \quad \text{or} \quad x = -1$$



$$7) \quad x^2 + y^2 = 0 \quad - \text{punkt } (0,0)$$

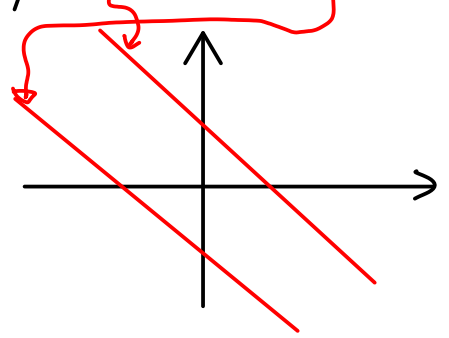


$$x^2 + 2xy + y^2 = 1$$

$$(x+y)^2 - 1 = 0$$

$$(x+y-1)(x+y+1) = 0$$

$$x+y-1=0 \quad \text{or} \quad x+y+1=0$$



Cel: do równania (*) dobrać układ współrzędnych (prostokątny) w którym równanie przyjmie możliwie prostą postać.

Definicja. Liniowy układ współrzędnych związany z bazą (U, W) jest *prostokątny*, jeżeli baza jest *ortonormalna*, tzn. $\|U\| = \|W\| = 1$, $\langle U, W \rangle = 0$.

Równoważnie: macierz P opisująca zamianę współrzędnych $((x) = P[x'])$ jest macierzą izometrii.

Najpierw rozważymy równanie (*) bez wyrazów liniowych:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0$$

Definicja. Funkcję $Q: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ postaci

$$Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

nazywamy *formą kwadratową*.

Macierz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ nazywamy macierzą formy kwadratowej Q (i oznaczamy $m(Q)$).

Zachodzą wzory:

$$Q(X) = \underset{\uparrow}{\langle AX, X \rangle} = \langle X, \underset{\uparrow}{AX} \rangle = X^T AX$$

Niech $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \langle AX, X \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} ax+by \\ bx+cy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = (ax+by)x + \\ &+ (bx+cy)y = ax^2 + byx + bxy + cy^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 = Q(X) \end{aligned}$$

$$X^T = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T = (x \ y)$$

$$\langle X, X' \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle = xx' + yy'$$

$$X^T X' = (x \ y) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (xx' + yy')$$

$$\langle X, AX \rangle = X^T AX$$

Lemat.

$$\langle AX, Y \rangle = \langle X, A^T Y \rangle$$

$$\left(\begin{array}{l} A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \\ X, Y \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right)$$

(W szczególności jeśli $A = A^T$, to $\langle AX, Y \rangle = \langle X, AY \rangle$.)

Dowód.

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{array}{l} ax_1y_1 + bx_2y_1 \\ + cx_1y_2 + dx_2y_2 \end{array}$$

||

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ay_1 + cy_2 \\ by_1 + dy_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{array}{l} ax_1y_1 + cx_1y_2 \\ + bx_2y_1 + dx_2y_2 \end{array}$$

$$\langle AX, Y \rangle = (AX)^T Y = (X^T A^T) Y = X^T (A^T Y) = \langle X, A^T Y \rangle$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{array}{c} A \\ \left(\begin{array}{cc} \boxed{\cdot} & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} X \\ \left(\begin{array}{c} \boxed{\cdot} \\ \cdot \end{array} \right) \end{array} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \boxed{\cdot} \\ \cdot \end{array} \right) \end{array} \\ \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} \boxed{\cdot} & \cdot \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \boxed{\cdot} \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \end{array} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} \boxed{\cdot} & \cdot \end{array} \right) \end{array} \downarrow^T \\ X^T \quad A^T \end{array} \right]$$

Wishful thinking. Gdyby macierz A formy kwadratowej Q była diagonalizowalna...

$$A = PDP^{-1}$$

$$Q(X) = \langle AX, X \rangle = \langle PDP^{-1}X, X \rangle = \langle DP^{-1}X, P^T X \rangle =$$

Ach, gdyby jeszcze... $P^T = P^{-1}$ (czyli: gdyby P było macierzą ortogonalną)

$$= \langle D(\underbrace{P^{-1}X}_{X'}), (\underbrace{P^{-1}X}_{X'}) \rangle = \langle DX', X' \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \lambda x' \\ \mu y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle = \lambda(x')^2 + \mu(y')^2$$

W prostokątnym liniowym układzie $X' = P^{-1}X$ krzywa jest dana równaniem postaci

$$\lambda(x')^2 + \mu(y')^2 + f = 0$$

które łatwo przekształcić do tzw. postaci kanonicznej – jednej z postaci

$$\pm \left(\frac{x'}{\alpha}\right)^2 \pm \left(\frac{y'}{\beta}\right)^2 = 1, \quad \pm \left(\frac{x'}{\alpha}\right)^2 \pm \left(\frac{y'}{\beta}\right)^2 = 0$$

$$(x')^2 = \gamma \quad \Leftarrow \quad \pm \left(\frac{x'}{\alpha}\right)^2 = 1, \quad \pm \left(\frac{x'}{\alpha}\right)^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x' = 0$$

$$(y')^2 = \delta \quad \Leftarrow \quad \pm \left(\frac{y'}{\beta}\right)^2 = 1, \quad \pm \left(\frac{y'}{\beta}\right)^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad y' = 0$$

Twierdzenie. (spektralne w $\mathbf{R}^2$)

Niech A będzie rzeczywistą macierzą symetryczną 2×2 ($A = A^T$).

Wtedy A diagonalizuje się w bazie ortonormalnej, tzn.

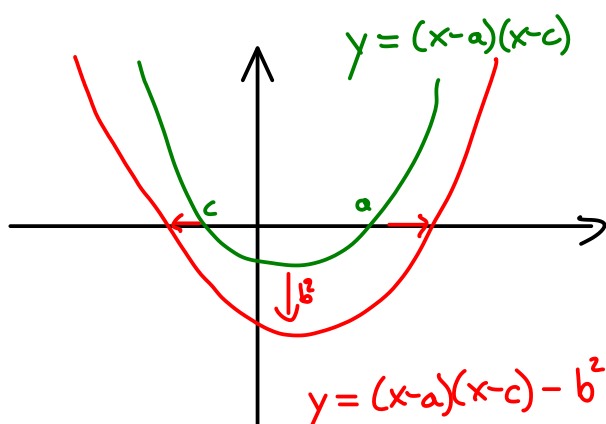
- istnieją wektory własne U, W macierzy A , takie że $\|U\| = \|W\| = 1, U \perp W$.
- $A = PDP^{-1}$, gdzie $P = (U, W)$ jest macierzą izometrii, a D jest diagonalna.

Dowód.

Niech $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Wtedy

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = (x-a)(x-c) - b^2.$$

Zauważmy, że $\chi_A(x)$ ma dwa różne pierwiastki (chyba że $a=c$ i $b=0$ - wtedy



$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ już jest diagonalna;
można przyjąć $U = E_1, W = E_2$)

Niech λ, μ będą różnymi pierwiastkami $\chi_A(x)$, U i W – jednostkowymi wektorami własnymi A które im odpowiadają. Pokażemy, że $U \perp W$:

$$\begin{aligned} \langle \lambda U, W \rangle &= \langle A U, W \rangle = \langle U, A W \rangle = \langle U, \mu W \rangle \\ &\stackrel{||}{=} \lambda \langle U, W \rangle \qquad \qquad \qquad \mu \stackrel{||}{=} \langle U, W \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda - \mu) \langle U, W \rangle &= 0 \\ \stackrel{||}{=} 0 &\Rightarrow \stackrel{||}{=} 0 \end{aligned}$$

□

Wniosek. Krzywa zadana równaniem

$$(*) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0, \quad (a, b \text{ lub } c \neq 0)$$

ma w pewnym prostokątnym liniowym układzie współrzędnych (x', y') równanie w postaci kanonicznej.

Przykład.

$$x^2 + \sqrt{3}xy = 3$$

$$A = m(Q) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

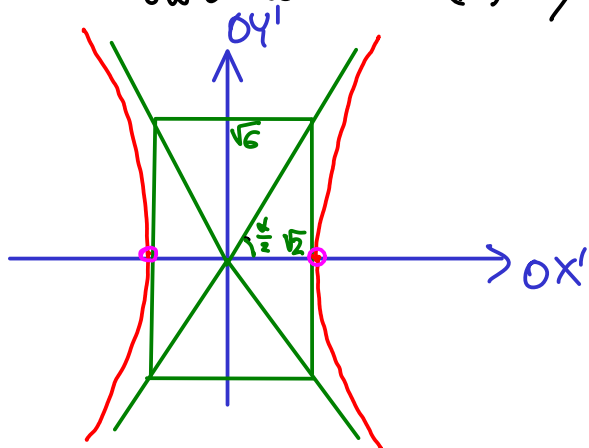
$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -x \end{vmatrix} = x^2 - x - \frac{3}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\lambda = \frac{3}{2}, \quad \mu = -\frac{1}{2}$$

W pewnym prostokątnym liniowym ukł. wsp. (x', y') krzywa ma równanie: $\lambda(x')^2 + \mu(y')^2 = 3$; tzn. $\frac{3}{2}(x')^2 - \frac{1}{2}(y')^2 = 3 \quad / : 3$

$$\frac{1}{2}(x')^2 - \frac{1}{6}(y')^2 = 1$$

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{y'}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1$$



- hiperbola!

- Odległość gałęzi: $2\sqrt{2}$

- Kąt między asymptotami: $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}, \quad \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \alpha = \frac{2\pi}{3}$

Umiemy już odpowiedzieć na pytania o geometrię krzywej, ale jeszcze nie na pytania o jej położenie na płaszczyźnie:

- Równania asymptot (we współrzędnych (x, y))?
- Równania osi OX', OY' (we współrzędnych (x, y))?
- Jak przeliczać współrzędne z (x', y') na (x, y) (i z powrotem)?

Związek współrzędnych: $X = PX'$, gdzie P ma w kolumnach wektory własne A .
Liczmy wektory własne A :

$$AU = \lambda U$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dots \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{3}{2}y \end{cases}$$

$$x = \sqrt{3}y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|U\|=1 : U = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$P = (U, W) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix},$$

$$X = PX'$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}x' - y'}{2} \\ y = \frac{x' + \sqrt{3}y'}{2} \end{cases}$$

równanie asymptot:

$$y' = \sqrt{3}x'$$

$$\frac{-x + \sqrt{3}y}{2} = \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}x + y}{2}$$

$$AW = \mu W$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dots \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x = -\frac{1}{2}y \end{cases}$$

$$\sqrt{3}x = -y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\|W\|=1 : W = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$X' = P^{-1}X$$

....

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}x + y}{2} \\ y' = \frac{-x + \sqrt{3}y}{2} \end{cases}$$

preludium
wsp.
stare
↑
nowe

$$y' = -\sqrt{3}x'$$

$$\frac{-x + \sqrt{3}y}{2} = -\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}x + y}{2}$$

$$-x + \sqrt{3}y = 3x + \sqrt{3}y$$

$$\underline{x=0}$$

rownania
asymptot we wsp. (x,y)

$$-x + \sqrt{3}y = -3x - \sqrt{3}y$$

$$2\sqrt{3}y = -2x$$

$$\underline{x + \sqrt{3}y = 0}$$

Równania osi OX' , OY' we wsp. (x,y):

$$y' = 0$$

$$x' = 0$$

$$-x + \sqrt{3}y = 0$$

$$\sqrt{3}x + y = 0$$

