

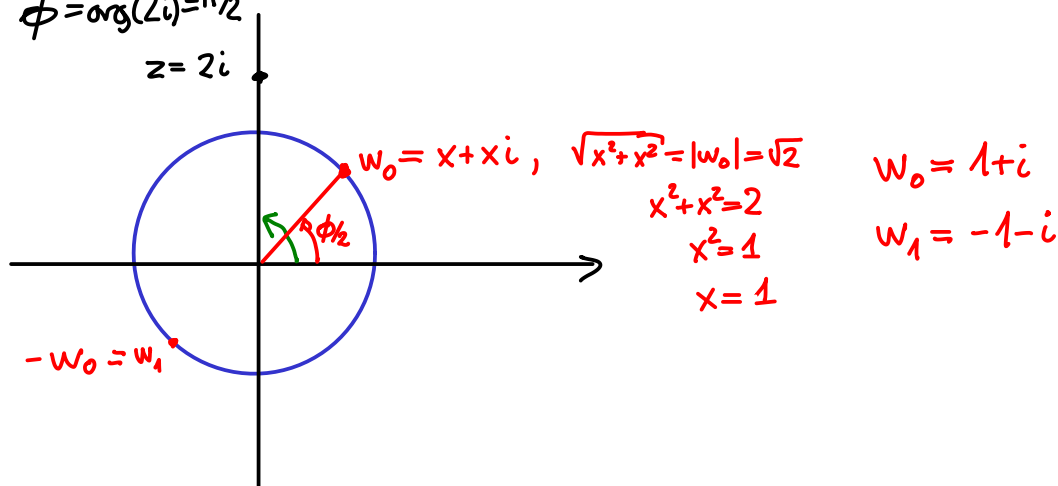
Pierwiastkowanie

Pierwiastki stopnia n z liczby z o module r i argumencie ϕ leżą w wierzchołkach n -kąta foremnego wpisanego w okrąg o środku 0 i promieniu $\sqrt[n]{r}$; jeden z nich ma argument ϕ/n .

Przykłady.

Pierwiastki stopnia 2 z $2i$:

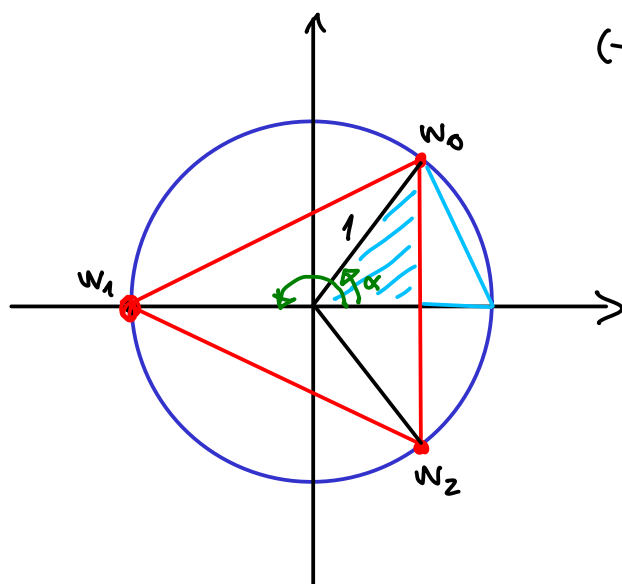
$r = |2i| = 2$; szukane pierwiastki leżą na okręgu o środku 0 i promieniu $\sqrt{2}$
 $\phi = \arg(2i) = \pi/2$



Pierwiastki stopnia 3 z -1 :

$$|-1| = 1, |w_k| = \sqrt[3]{1} = 1$$

$(-1)^3 = -1$, $\tan^{-1} -1$ jest jednym z szukanych pierwiastków.



$$\alpha = 60^\circ = \pi/3$$

Wzajemny trójkąt to pół trójkąta równobocznego; jego bok na osi OX ma długość $\frac{1}{2}$, a wysokość $= \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$w_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, w_1 = -1$$

$$w_2 = \overline{w_0} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Wielomiany zespolone

$$z^2 + 1 = 0$$

$$z^2 + 7 = 0$$

$$z^2 = -1$$

$$z^2 = -7$$

$$z = \pm i$$

$$z = \pm \sqrt{7} i$$

$$(-i)^2 = ((-1) \cdot i)^2 = (-1)^2 i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$az^2 + bz + c = 0, a \neq 0$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(działa nawet gdy
 $a, b, c \in \mathbb{C}$)

Twierdzenie. (zwane zasadniczym twierdzeniem algebry; udowodnił je Gauss)

Niech $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ będzie wielomianem stopnia $n > 0$ o współczynnikach zespolonych. Wtedy istnieje liczba zespolona w , taka że $P(w) = 0$.

Uwaga. $(P(w) = 0) \iff (P(z) = (z - w)Q(z) \text{ dla pewnego wielomianu } Q(z)).$

$$\begin{aligned} a_n z^n + \dots = P(z) &= (z - w_1) Q_1(z) = (z - w_1)(z - w_2) Q_2(z) = \dots = \\ &\quad \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{Gauss: } \exists w_1 \in \mathbb{C} & \text{Gauss: } \exists w_2 \in \mathbb{C} & \exists w_3 \in \mathbb{C} \\ P(w_1) = 0 & Q_1(w_2) = 0 & Q_2(w_3) = 0 \end{array} \end{aligned}$$

$$= (z - w_1) \dots (z - w_n) \overset{a_n}{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{stopnia } 0}}{Q_n(z)}} = a_n (z - w_1) \dots (z - w_n) = a_n \prod_{k=1}^n (z - w_k)$$

Wniosek. Wielomian zespolony stopnia n rozkłada się na iloczyn n czynników stopnia 1. Ma on więc dokładnie n zespolonych pierwiastków (liczonych z krotnościami).

Przykład. $z^2 + 1$. wiemy, że i jest pierwiastkiem $z^2 + 1$.
 Podzielmy $z^2 + 1$ przez $z - i$

$$\begin{array}{r} z+i \\ z^2+1 : z-i \\ \hline -z^2-iz \\ \hline iz+1 \\ -iz+1 \\ \hline 0 \end{array} \quad z^2+1 = (z-i)(z+i)$$

Wielomiany rzeczywiste

Lemat. Jeśli $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ma współczynniki rzeczywiste ($a_k \in \mathbf{R}$), to dla dowolnego zespolonego w zachodzi

$$\overline{P(w)} = P(\overline{w})$$

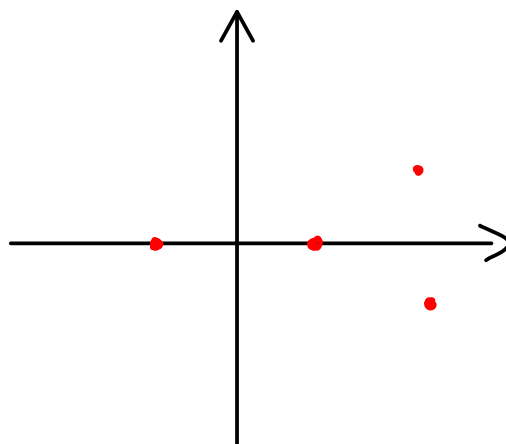
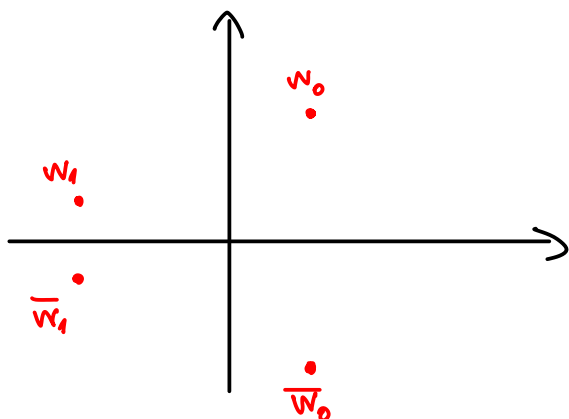
Dowód.

$$\overline{P(z)} = \overline{\sum a_k z^k} = \sum \overline{a_k z^k} = \sum \underbrace{\overline{a_k}}_{a_k, \text{ bo } a_k \in \mathbf{R}} \overline{z^k} = \sum a_k \overline{z}^k = P(\overline{z}) \quad \square$$

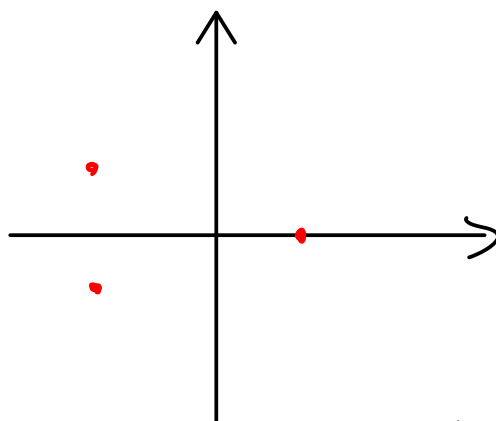
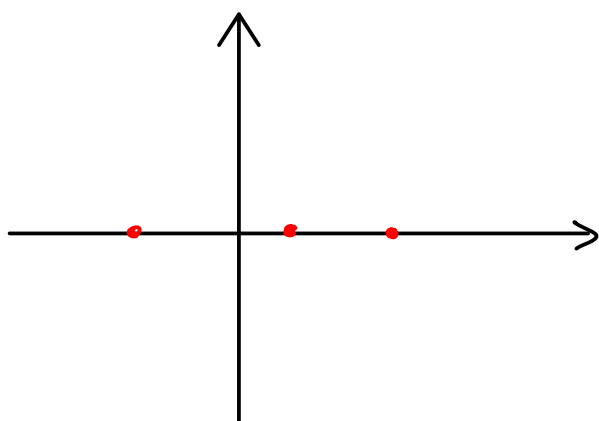
Wniosek. Jeśli w jest pierwiastkiem wielomianu $P(z)$ o współczynnikach rzeczywistych, to $\overline{w}$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu.

$$(P(\overline{w}) = \overline{P(w)} = \overline{0} = 0)$$

Pierwiastki zespolone wielomianu stopnia 4 o wsp. rzeczywistych :

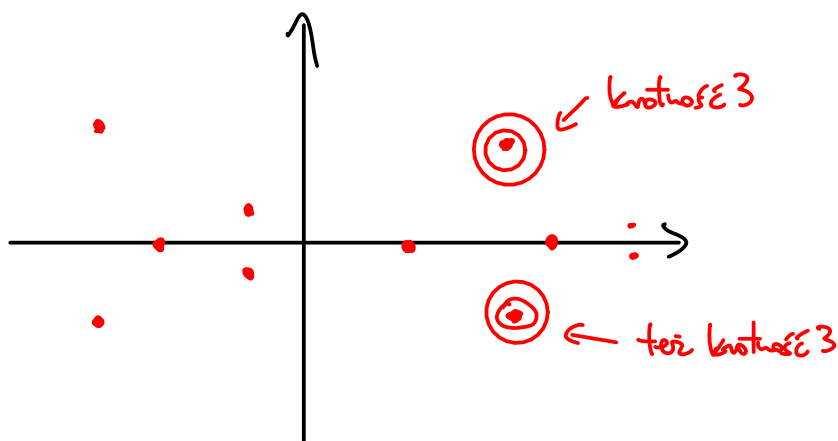


Dla stopnia 3 :



wielomian rzeczywisty stopnia 3 musi mieć rzeczywisty pierwiastek.

Ogólnie, dla wielomianów rzeczywistych:



$$b \neq 0 \quad \begin{aligned} w + \bar{w} &= a + bi + (a - bi) = 2a = 2\operatorname{Re}(w) \\ w\bar{w} &= (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |w|^2 \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla $w = a + bi$:

$$(z - w)(z - \bar{w}) = z^2 - (w + \bar{w})z + w\bar{w} = z^2 - 2\operatorname{Re}(w)z + |w|^2 =$$

zbiór wielomianów
zmienną z o wsp.
↓ rzeczywistych.

$$= \underline{z^2 - 2az + a^2 + b^2} = (z - a)^2 + b^2$$

$$\mathbb{R}[z] \ni P(z) = (z - u_1)Q_1(z) = (z - u_1)(z - u_2)Q_2(z) = \dots = (z - u_1)\dots(z - u_\ell)Q_\ell(z) =$$

jeśli $u_i \in \mathbb{R}$, to $Q_i(u_i) = 0$
 $Q_i(z) \in \mathbb{R}[z]$ $u_i \in \mathbb{R}$

nie ma
pierwiastków w $\mathbb{R}$,
 $Q_\ell(z) \in \mathbb{R}[z]$

$$= (z - u_1)\dots(z - u_\ell)(z - w_1)(z - \bar{w}_1)Q_{\ell+2}(z) = \dots$$

$$Q_\ell(w_1) = 0, w_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \quad \underbrace{\quad}_{\mathbb{R}[z]} \quad \underbrace{\quad}_{\mathbb{R}[z]} \quad Q_{\ell+2}(w_2) = 0, w_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

i terz $Q_\ell(\bar{w}_1) = 0$ $Q_{\ell+2}(\bar{w}_2) = 0$

$$\dots = \prod_{i=1}^{\ell} (z - u_i) (z - w_1)(z - \bar{w}_1)(z - w_2)(z - \bar{w}_2) Q_{\ell+4}(z) = \dots$$

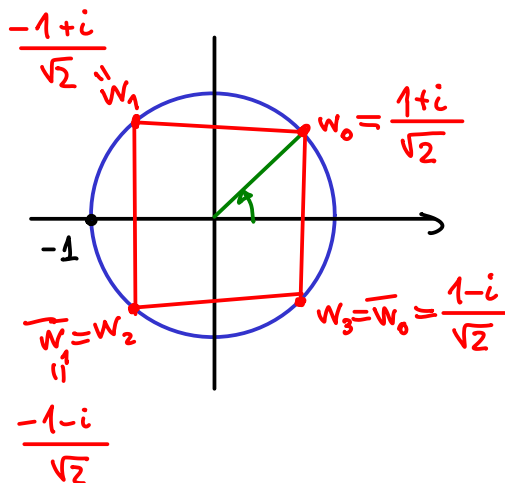
⇓

$$P(z) = a_n \prod_{i=1}^{\ell} (z - u_i) \prod_{j=1}^k (z - w_j)(z - \bar{w}_j)$$

Fakt. Wielomian o współczynnikach rzeczywistych rozkłada się na iloczyn czynników rzeczywistych stopni 1 lub 2.

Przykład.

$z^4 + 1$. Pierwiastki tego wielomianu to pierwiastki stopnia 4 z -1 .



$$\begin{aligned} z^4 + 1 &= (z - w_0)(z - \bar{w}_0)(z - w_1)(z - \bar{w}_1) = \\ &= \left(z - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \left(z - \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(z - \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1) \end{aligned}$$

Zastosowania

Zadanie 1.

Niech $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x - c$, $c \in \mathbf{R}$. Załóżmy, że $P(x)$ ma pięć pierwiastków rzeczywistych x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Niech $Q(x) = (x - x_1^2)(x - x_2^2)(x - x_3^2)(x - x_4^2)(x - x_5^2)$. Oblicz sumę modułów współczynników wielomianu $Q(x)$.

$$Q(x) = x^5 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2)x^4 + (x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + \dots + x_4^2x_5^2)x^3 - (x_1^2x_2^2x_3^2 + \dots)x^2 + x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2x_5^2x$$

Suma modułów wsp. $Q(x) = -Q(-1)$

$$\begin{aligned} Q(x^2) &= \prod_{j=1}^5 (x^2 - x_j^2) = \prod_{j=1}^5 (x - x_j)(x + x_j) = \underbrace{\prod_{j=1}^5 (x - x_j)}_{P(x)} \prod_{j=1}^5 (x + x_j) = \\ &= P(x) \cdot \underbrace{\left[(-1) \prod_{j=1}^5 (-x - x_j) \right]}_{P(-x)} = -P(x)P(-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -Q(-1) &= -Q(i^2) = -(-P(i)P(-i)) = P(i)P(-i) = P(i)P(\overline{i}) = \\ &= P(i)\overline{P(i)} = |P(i)|^2 \end{aligned}$$

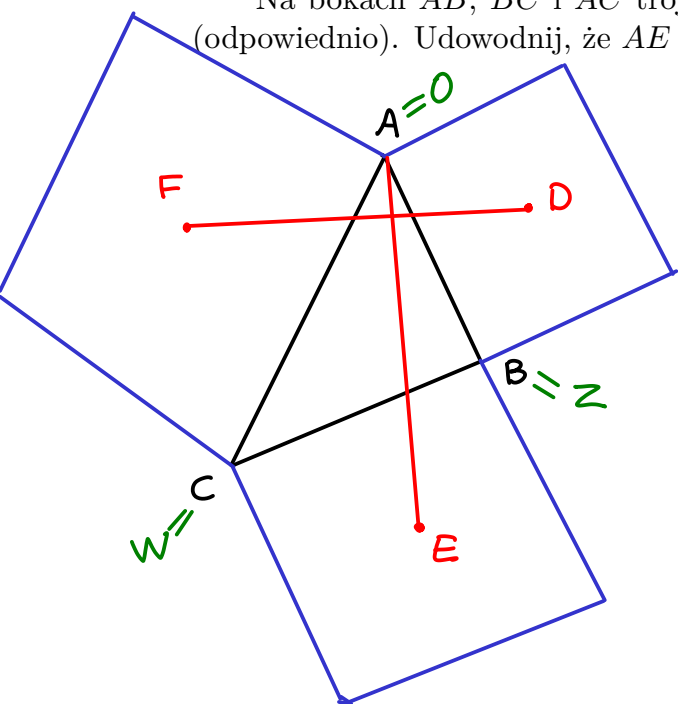
$$P(i) = i^5 - 5i^3 + 4i - c = i + 5i + 4i - c = 10i - c$$

$$|P(i)|^2 = 10^2 + (-c)^2 = 100 + c^2$$

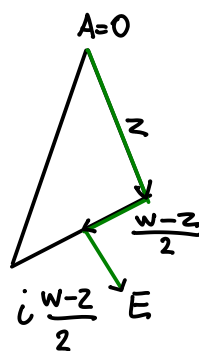
$$\text{Odp: } 100 + c^2.$$

Zadanie 2.

Na bokach AB , BC i AC trójkąta ABC zbudowano kwadraty o środkach D , E , F (odpowiednio). Udowodnij, że $AE \perp DF$.



Wyliszmy $E-A$ i $D-F$ w terminach z, w .



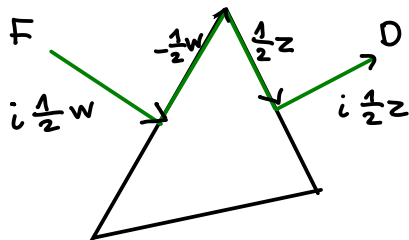
[Operacja $z \mapsto iz$
to obrót o $\pi/2$
przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara]

$$\begin{aligned} E-A &= z + \frac{w-z}{2} + i \frac{w-z}{2} = \\ &= \frac{1-i}{2} z + \frac{1+i}{2} w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D-F &= i \cdot \frac{1}{2} w - \frac{1}{2} w + \frac{1}{2} z + i \frac{1}{2} z = \\ &= \frac{1+i}{2} z + \frac{-1+i}{2} w \end{aligned}$$

$$(1-i)i = i - i^2 = 1+i$$

$$(1+i)i = i + i^2 = -1+i$$



Twierdzenie. (Jordana 2×2 , zespolone)

Niech $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$. Wówczas A można zapisać w postaci

$$A = PJP^{-1},$$

gdzie P jest pewną odwracalną macierzą zespoloną, zaś J jest równe

- 1) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ – jeśli $\chi_A(x) = (x - \lambda)(x - \mu)$, $\lambda \neq \mu$;
- 2) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ – jeśli $\chi_A(x) = (x - \lambda)^2$.

Dowód.

Jeśli $\chi_A(x)$ ma dwa różne pierwiastki, twierdzenie o diagonalizacji daje tezę. Jeśli $\chi_A(x) = (x - \lambda)^2$ i A ma dwa lnz wektory własne – to samo.

Pozostaje przypadek gdy $\chi_A(x) = (x - \lambda)^2$ i A nie ma dwóch lnz wektorów własnych. Niech U będzie niezerowym wektorem własnym, a W nie będzie z nim lnz. Zapiszmy macierz przekształcenia F_A w bazie (U, W) :

$$\begin{aligned} AU &= \lambda U \\ AW &= \alpha U + \beta W \end{aligned} \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P = (U, W)$$

ale $\beta = \lambda$:

$$\begin{aligned} 2\lambda &= \text{tr} A = \text{tr} \left(P \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1} \right) = \text{tr} \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \lambda + \beta \Rightarrow \beta = \lambda \\ \chi_A(x) &= (x - \lambda)^2 = x^2 - \underbrace{2\lambda x}_{\text{tr} A} + \lambda^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AU &= \lambda U \\ AW &= \alpha U + \lambda W \end{aligned} \quad A = P \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P = (U, W)$$

Wiemy, że $\alpha \neq 0$ (inaczej U, W są lnz wektorami własnymi). Niech $U' = \alpha U$; Zapiszmy macierz przekształcenia F_A w bazie (U', W) :

$$\begin{aligned} AU' &= A(\alpha U) = \alpha AU = \alpha \lambda U = \lambda \alpha U = \lambda U' \\ AW &= U' + \lambda W \end{aligned} \quad A = P' \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} (P')^{-1},$$

gdzie $P' = (U', W)$