

$\mathbf{R}^3$

$$\mathbf{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbf{R} \right\}$$

W tej przestrzeni określamy operacje dodawania i mnożenia przez skalary analogicznie jak w $\mathbf{R}^2$. Ich własności też są analogiczne jak w $\mathbf{R}^2$ ("aksjomaty przestrzeni liniowej").

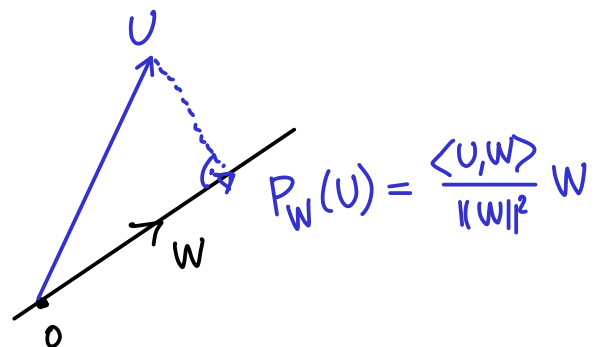
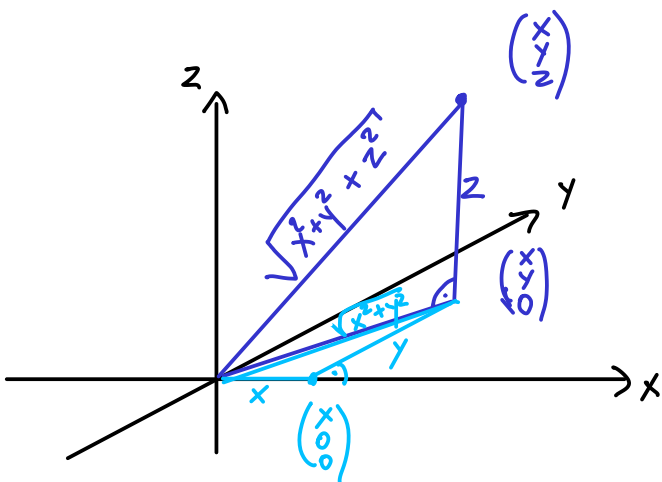
Iloczyn skalarny:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right\rangle = xx' + yy' + zz'$$

Norma (długość):

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

To naprawdę jest długość – tw. Pitagorasa:

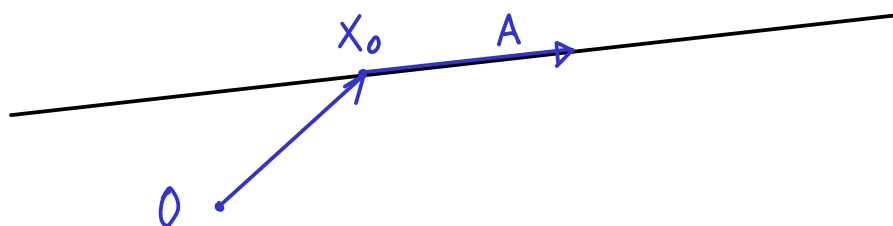


Dla niezerowych $X, Y \in \mathbf{R}^3$: $\langle X, Y \rangle = \|X\| \cdot \|Y\| \cdot \cos \angle(X, Y)$

Często wzywamy tego wzoru do liczenia kąta:

$$\cos \angle(X, Y) = \frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \cdot \|Y\|}$$

Proste w $\mathbb{R}^3$



$$X = X_0 + tA, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \rightarrow t = \frac{x - x_0}{a}$$

Rugujemy t :

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

nieparametryczny
opis prostej w $\mathbb{R}^3$

o ile $a, b, c \neq 0$.

Przykład 1. $\frac{2x-7}{4} = y+2 = \frac{-6z+8}{9}$

$$\frac{x - \frac{7}{2}}{2} = \frac{y - (-2)}{1} = \frac{z - \frac{4}{3}}{-\frac{3}{2}} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -2 \\ 4/3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

opis nieparametryczny

opis parametryczny

Przykład 2. $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

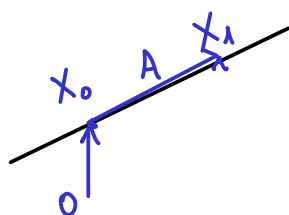
$$\begin{cases} x = 1+t & \rightarrow t = x-1 \\ y = 2 & \rightarrow ? \\ z = 1+2t & \rightarrow t = \frac{z-1}{2} \end{cases}$$

Opis nieparametryczny:

$$x-1 = \frac{z-1}{2}, \quad y=2$$

Jak wrócić do opisu parametrycznego?

Wybieramy dwa punkty X_0, X_1 na prostej i piszemy: $X = X_0 + t(X_1 - X_0)$



Konkretnie, w naszym przykładzie:

$$X_0: \begin{matrix} x=2, & x-1=1 \\ y=2 \\ z=3, & \frac{z-1}{2}=1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X_1: \begin{matrix} x=0, & x-1=-1 \\ y=2 \\ z=-1, & \frac{z-1}{2}=-1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$A = X_1 - X_0 =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

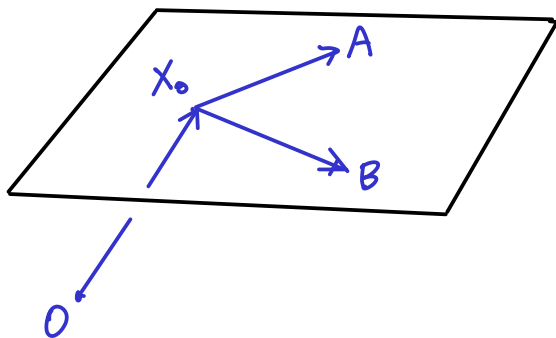
Płaszczyzny

Parametrycznie:

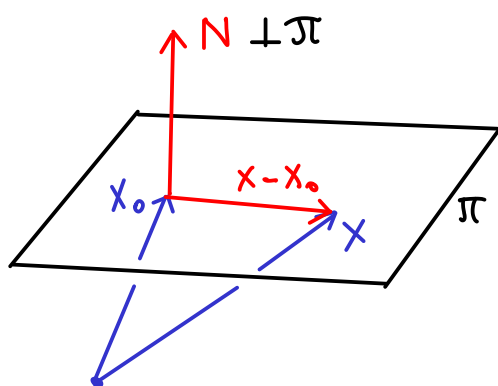
$$X = X_0 + tA + sB$$

A, B niewspółliniowe.

t, s - parametry rzeczywiste.



Nieparametrycznie:



$$X - X_0 \perp N$$

$$\langle X - X_0, N \rangle = 0$$

$$\text{Niech } X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$

$$ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_{\text{stała (niezależna od } X)}$$

Równanie ogólne płaszczyzny w $\mathbf{R}^3$:

$$ax + by + cz = d.$$

Przykład. $X = \underset{\substack{\uparrow \\ X_0}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} + t \underset{\substack{\uparrow \\ A}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} + s \underset{\substack{\uparrow \\ B}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}} \leadsto \text{równanie ogólne?}$

Policzymy wektor N (normalny do płaszczyzny).

$$\begin{cases} \langle N, A \rangle = 0 \\ \langle N, B \rangle = 0 \end{cases} \quad \text{niech } N = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \\ \langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + c = 0 \leadsto c = -2a \\ a + 4b - c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + 4b + 2a = 0 \\ 4b = -3a \end{cases}$$

np $a=1$ daje $b = -3/4, c = -2$

$N = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/4 \\ -2 \end{pmatrix}$; ale wolę $N = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

Nasze równanie ma więc postać: $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \pi$

$-4x + 3y + 8z = d$
 $\uparrow$ dobieramy tak, by równanie
 zgodziło się dla X_0

$d = -4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = -4 + 6 + 24 = 26$

Odp.

$-4x + 3y + 8z = 26$

w $\mathbb{R}^2$

$N \perp \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\Downarrow$
 $N = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

Iloczyn wektorowy

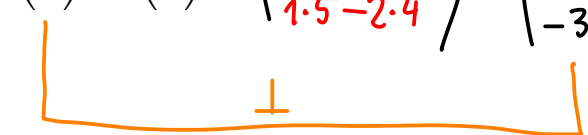
Definicja. Iloczynem wektorowym wektorów $A, B \in \mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

nazywamy wektor

$$A \times B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Przykład. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ -1 \cdot 6 - 3 \cdot 4 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$



Własności.

- 1) Iloczyn wektorowy jest dwuliniowy i antysymetryczny:

$$A \times (\beta B + \gamma C) = \beta A \times B + \gamma A \times C, \quad (\beta B + \gamma C) \times A = \beta B \times A + \gamma C \times A,$$

$$A \times B = -B \times A.$$

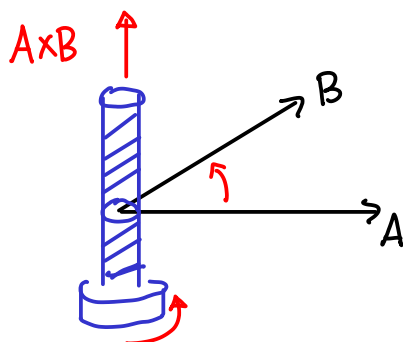
- 2) Iloczyn wektorowy jest prostopadły do swoich czynników:

$$A \times B \perp A, B.$$

- 3) Długość $A \times B$ jest równa polu równoległoboku rozpiętego przez A i B :

$$\|A \times B\| = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \sin \angle(A, B).$$

- 4) Zwrot iloczynu wektorowego jest dany regułą śruby prawoskrętnej:



reguła FBI

Przykład 1.

Napisz równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, równoległej do prostej $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+2}{3}$ i prostopadłej do płaszczyzny $3x + 2y - z = 0$.

Szukamy wektora normalnego N_π płaszczyzny π .

- N_π jest $\perp$ do wektora kierunkowego prostej: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+2}{3}$
tym wektorem kierunkowym jest $K = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
- N_π jest $\perp$ do wektora normalnego N płaszczyzny $3x + 2y - z = 0$,
czyli do $N = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

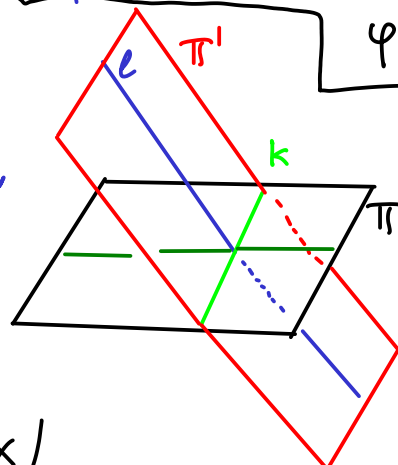
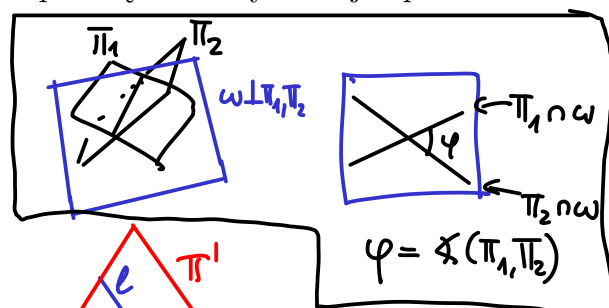
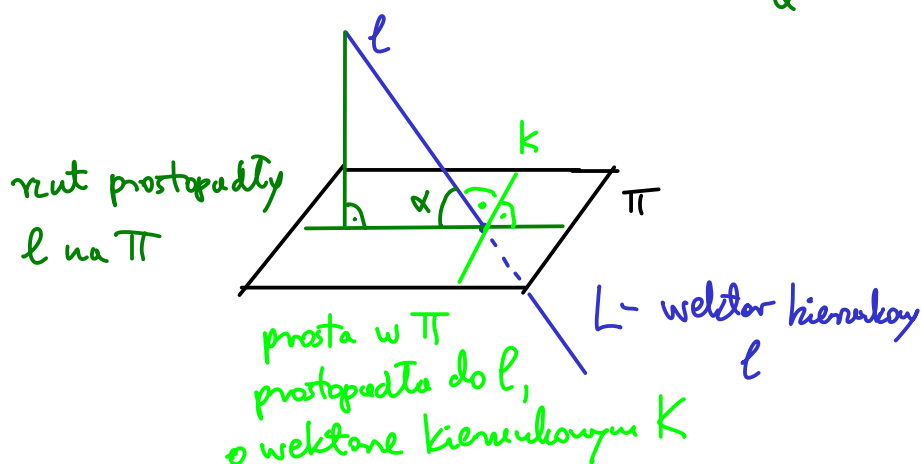
Możemy pisać $N_\pi = K \times N = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-6 \\ -(-2-9) \\ 4-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 11 \\ -8 \end{pmatrix}$

Równanie: $-10x + 11y - 8z = -12$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \pi \rightarrow -10 \cdot 1 + 11 \cdot 2 - 8 \cdot 3 = -10 + 22 - 24 = -12$

Przykład 2.

Dla danej prostej ℓ przecinającej daną płaszczyznę π pod kątem ostrym znajdź płaszczyznę π' , taką że $\ell \subset \pi'$ oraz $\angle(\pi, \pi') = \angle(\pi, \ell)$.



$N_{\pi'} = ?$ $N_{\pi'} = K \times L = (L \times N_\pi) \times L$

$\uparrow$
prostopadły do L, N_π