

Twierdzenie. (Jordana 2×2 , zespolone)

Niech $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$. Wówczas A można zapisać w postaci

$$A = PJP^{-1},$$

gdzie P jest pewną odwracalną macierzą zespoloną, zaś J jest równe

1) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ – jeśli $\chi_A(x) = (x - \lambda)(x - \mu)$, $\lambda \neq \mu$;

2) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ – jeśli $\chi_A(x) = (x - \lambda)^2$.

Przykład. $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 4-x & -4 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, $\lambda = 2$
Z tego już wiemy, że $A = P \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$ dla pewnej P odwracalnej. (podwójny pierwiastek)

By znaleźć P szukamy wektora własnego A :

$$AU = 2U: \begin{cases} 4x - 4y = 2x \\ x = 2y \end{cases}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ jest wektorem własnym.}$$

Wzemy dowolny wektor W linz z U : $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$AW = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \end{pmatrix} \quad \text{— tu } \alpha = -1$$

↑
dla pewnego α — z uwagi na pierwszą wsp.

$$AW = (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)U + 2W$$

Niech $U' = (-1) \cdot U$; wtedy $AU' = 2U'$, $AW = U' + 2W$

Dla $P = (U', W)$:

$$AP = A(U', W) = (AU', AW) = (2U', U' + 2W) = (U', W) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{dla } P = [U', W] = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zatem:

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Twierdzenie. (Jordana 2×2 , rzeczywiste)

Niech $A \in M_{2 \times 2}(\mathbf{R})$. Wówczas A można zapisać w postaci

$$A = PJP^{-1},$$

gdzie P jest pewną odwracalną macierzą rzeczywistą, zaś J jest równe

1) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ – jeśli $\chi_A(x) = (x - \lambda)(x - \mu)$, $\lambda \neq \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$;

2) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ – jeśli $\chi_A(x) = (x - \lambda)^2$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

3) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ (czyli $r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$) – jeśli $\chi_A(x) = (x - \lambda)(x - \bar{\lambda})$

dla $\lambda = a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$.

Dowód.

1), 2) – tw. o diagonalizacji i poprzedni dowód.

3) Znajdujemy wektor własny: $AU = \lambda U$.

$$U = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta \\ \gamma + i\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} = X + iY$$

$$AU = A(X + iY) = \underline{AX} + i\underline{AY}$$

$$\stackrel{||}{=} \lambda U = (a + bi)(X + iY) = \underline{(aX - bY)} + i\underline{(bX + aY)}$$

$$\begin{cases} AX = aX - bY \\ AY = bX + aY \end{cases}$$

X, Y linz: gdyby nie, to np. $Y = tX$ dla pewnego $t \in \mathbf{R}$
 wtedy $AX = aX - bY = aX - btX = (a - bt)X$;
 zatem X jest w. własnym dla w. własnej $a - bt \in \mathbf{R} - \S$.
 (chyba że $X = 0$, ale wtedy $Y = t \cdot 0 = 0$ i $U = 0 + i0 = 0 - \S$)

Niech $P = (X, Y)$

$$A = P \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} P^{-1}$$

(minus nie tam gdzie chcemy)

Poprawiamy: $P = (X, -Y)$

$$\text{wtedy: } \begin{cases} AX = aX + b(-Y) \\ A(-Y) = -bX + a(-Y) \end{cases}, \quad A = P \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} P^{-1}$$

□

Przykład.

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - 7x_n, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(x) = x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3, \quad \lambda = 2 + i\sqrt{3}, \quad \bar{\lambda} = 2 - i\sqrt{3}$$

tw Jordana (nad $\mathbb{R}$): $A = P \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$ dla pewnej $P \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Szukamy P ; w tym celu szukamy wektora własnego A

$$AU = \lambda U: \begin{cases} 4x - 7y = (2 + i\sqrt{3})x \\ x = (2 + i\sqrt{3})y \end{cases} \Rightarrow \text{wp. } U = \begin{pmatrix} 2 + i\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_X + i \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}}_Y$$

$$P = (X, Y) = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}}_{\parallel} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$r = \sqrt{2^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{7}$$

$$\sqrt{7} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$, \text{ gdzie } \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{7}} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\sqrt{7}^n \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Stąd wynika, że:

$$x_n = \alpha \cdot \sqrt{7}^n \cos n\theta + \beta \sqrt{7}^n \sin n\theta$$

Twierdzenie.

Rozważmy ciąg liczb rzeczywistych (x_n) spełniający (dla pewnych $a, b \in \mathbf{R}$) rekurencję

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$$

Jeśli równanie charakterystyczne $x^2 - ax - b = 0$:

a) ma dwa pierwiastki rzeczywiste λ, μ , to dla pewnych $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

$$x_n = \alpha \lambda^n + \beta \mu^n;$$

b) ma podwójny pierwiastek rzeczywisty λ , to dla pewnych $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

$$x_n = \alpha \lambda^n + \beta n \lambda^{n-1};$$

c) ma dwa nierzeczywiste pierwiastki sprzężone $\lambda, \bar{\lambda}$, gdzie $\lambda = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, to dla pewnych $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

$$x_n = \alpha r^n \cos n\theta + \beta r^n \sin n\theta.$$

Dowód. $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n \rightsquigarrow X_{n+2} = \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = A X_n$

$X_n = A^n X_0$; zatem x_n jest kombinacją wyrazów A^n .

tw. Jordana: $A = PJP^{-1}$, $A^n = PJ^nP^{-1}$; x_n jest kombinacją wyrazów J^n .

a) $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}$, $x_n = \alpha \lambda^n + \beta \mu^n$

b) $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$, $x_n = \alpha \lambda^n + \beta n \lambda^{n-1}$

c) $J = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $J^n = r^n \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$,

$x_n = \alpha r^n \cos n\theta + \beta r^n \sin n\theta \quad (= A r^n \cos(n\theta + \varphi))$

□

Postać wykładnicza

Zamiast $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ piszemy $re^{i\theta}$. Innymi słowy definiujemy $e^{i\theta}$ wzorem

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Fakt. $e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta}e^{i\phi}$.

Dowód.

$$e^{i\theta+i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)} = \underline{\cos(\theta+\varphi)} + i \underline{\sin(\theta+\varphi)} \quad \text{=} \quad \text{}$$

$$e^{i\theta}e^{i\varphi} = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \underline{(\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi)} + i \underline{(\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi)}$$

Ogólnie:

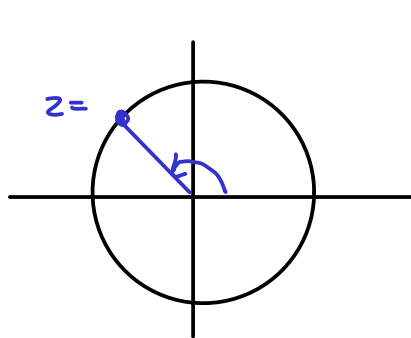
- definiujemy, dla $z = a + bi$,

$$e^z = e^a(\cos b + i \sin b);$$

- stwierdzamy, że

$$e^{z+w} = e^ze^w.$$

Przykład. $\frac{-1+i}{\sqrt{2}} = z$



$$|z| = 1, \quad \arg z = \frac{3\pi}{4}$$

$$z = 1 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = e^{i \frac{3\pi}{4}} = \exp\left(i \cdot \frac{3\pi}{4}\right)$$

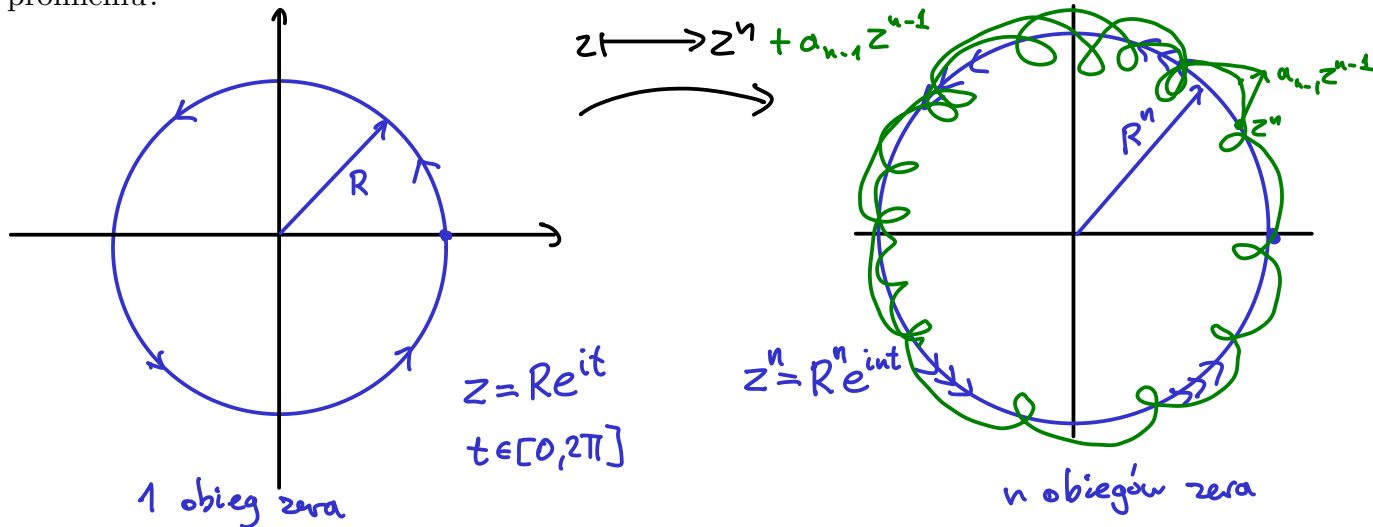
Wzory na pierwiastki: jeśli $z = re^{i\phi}$ zaś $w^n = z$, to

$$w = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n})}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Gauss. $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $a_k \in \mathbf{C}$, $n > 0$, $a_n \neq 0 \Rightarrow (\exists w \in \mathbf{C})(P(w) = 0)$.

Bez straty ogólności: $a_n = 1$, $a_0 \neq 0$.

Jak porusza się po $\mathbf{C}$ liczba $P(z)$, gdy z obiega jednokrotnie 0 po okręgu o dużym/małym promieniu?



Niech $R > 100(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|)$. Wtedy dla $|z| = R$

$$|z^n - P(z)| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^k \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^{n-1} < R^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| + 1 \right) < R^{n-1} \cdot \frac{R}{100} =$$

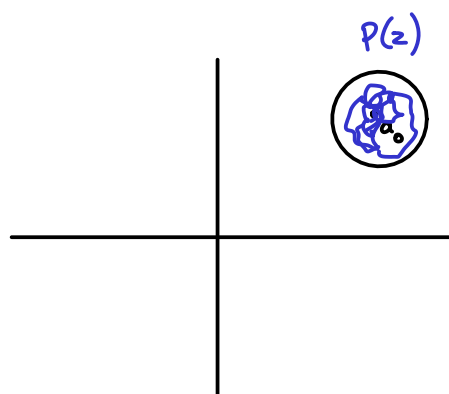
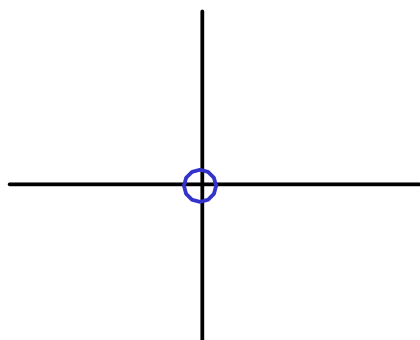
$$= \frac{R^n}{100} = \frac{1}{100} |z^n|$$

Gdy z jednokrotnie obiega zero po okręgu o dużym promieniu,
 $P(z)$ obiega zero n -krotnie.

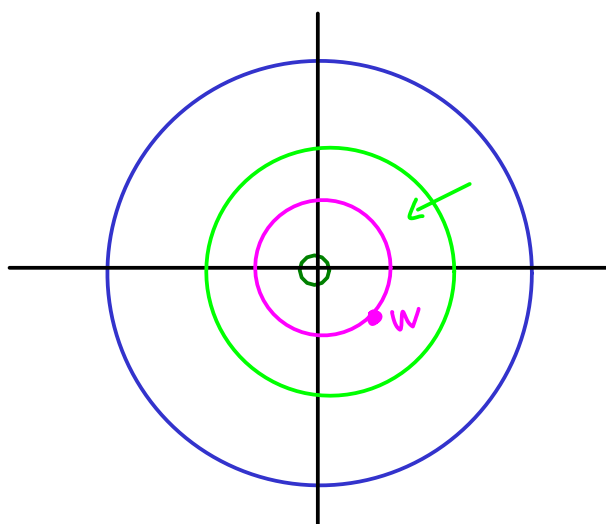
Mały promień. Niech $r < \frac{|a_0|}{100(\sum_{k=0}^n |a_k|)}$. Wtedy dla $|z| = r$

$$|a_0 - P(z)| = \left| \sum_{k=1}^n a_k z^k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| |z|^k = \sum_{k=1}^n |a_k| r^k \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \cdot r \leq$$

$$\leq r \left(\sum_{k=0}^n |a_k| \right) < \frac{|a_0|}{100 \left(\sum_{k=0}^n |a_k| \right)} \cdot \left(\sum_{k=0}^n |a_k| \right) = \frac{|a_0|}{100}$$



gdy z obiega zero jednokrotnie po okręgu o małym promieniu,
 $P(z)$ obiega zero 0-krotnie.



$$P(w) = 0$$

