

Wyznacznik

Definicja. Wyznacznikiem (lub iloczynem mieszanym) trójki wektorów $A, B, C \in \mathbf{R}^3$ nazywamy liczbę

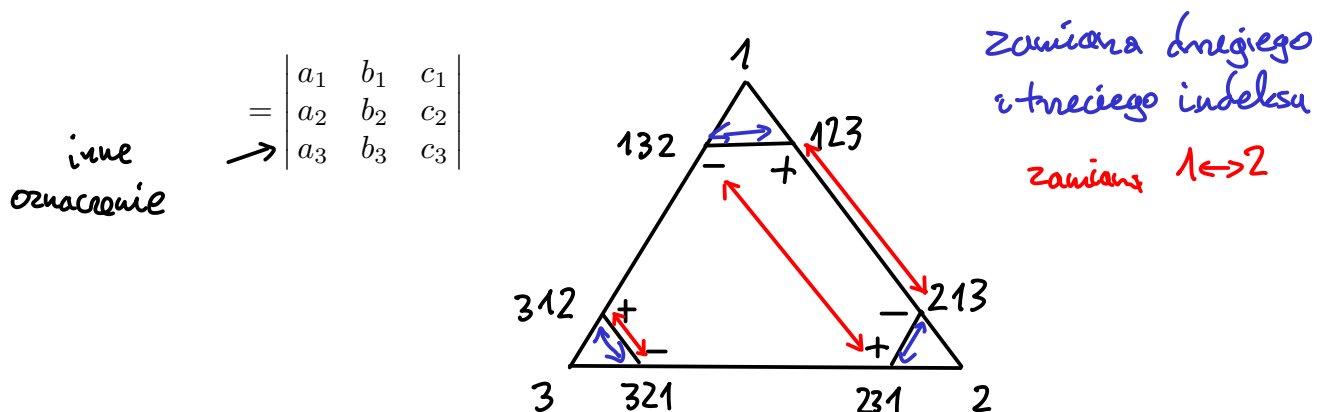
$$\det(A, B, C) = \langle A \times B, C \rangle.$$

Fakt. $A, B, C \in \mathbf{R}^3$ są lnz $\iff$ objętość $\text{obj}(A, B, C) \neq 0 \iff \det(A, B, C) \neq 0$.

Jak liczyć wyznacznik?

$$\det(A, B, C) = \langle A \times B, C \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_3$$

$$= a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 + a_3 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3$$



$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Schemat
Sarrusa

Przykład

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 + 0 - 4 - (-3) - 0 - 0 = 2$$

Schemat Sarrusa nie liczy poprawnie wyznacznika 4×4 .

$$\pm 1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Własności wyznacznika

$$\det(A, B, C)$$

$$\langle A \times B, C \rangle$$

Fakt.

A) Wyznacznik jest trójliniowy:

$$\det(\alpha A + \alpha' A', B, C) = \alpha \det(A, B, C) + \alpha' \det(A', B, C)$$

$$\det(A, \beta B + \beta' B', C) = \beta \det(A, B, C) + \beta' \det(A, B', C)$$

$$\det(A, B, \gamma C + \gamma' C') = \gamma \det(A, B, C) + \gamma' \det(A, B, C')$$

B) Wyznacznik jest antysymetryczny:

$$\begin{aligned} \det(A, B, C) &= -\det(B, A, C) \\ &= \det(B, C, A) = -\det(C, B, A) \\ &= \det(C, A, B) = -\det(A, C, B) \end{aligned}$$

Wnioski:

$$\det(A, A, B) = 0$$

$$\det(A, B, A) = 0$$

$$\det(B, A, A) = 0$$

Wnioski

1. Jeśli do pewnej kolumny wyznacznika dodamy kombinację liniową pozostałych kolumn, jego wartość nie zmieni się.

$$\det(A + \beta B + \gamma C, B, C) = \det(A, B, C) + \beta \det(\underline{B}, \underline{B}, C) + \gamma \det(\underline{C}, \underline{B}, \underline{C}) =$$

$$= \det(A, B, C)$$

2. Jeśli zamienić miejscami dwie kolumny wyznacznika, jego wartość zmieni znak.
- 3.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \bullet & \bullet \\ 0 & \beta & \bullet \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma$$

4.

$$\det(M) = \det(M^T)$$

ZADANIE

5. Wszelkie operacje, jakie robiliśmy na kolumnach wyznacznika, można też wykonywać na wierszach.

Przykład.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2[1]} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{-3[1]} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2[2]} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$$

Rozwinięcie względem pierwszego wiersza

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 + 0 + (-1) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{+[1]} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = 6 - 4 = 2$$

Cramerowskie układy równań

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = u_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = u_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = u_3 \end{cases}$$

x_1, x_2, x_3 - niewiadome, $a_{11}, \dots, a_{33}$ - współczynniki, u_1, u_2, u_3 - prawe strony
 (szukane) (dane) (dane)

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$(**) \quad x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 = U$$

$$A = (A_1, A_2, A_3), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(***) \quad AX = U$$

Twierdzenie.

Jeśli $\det(A) \neq 0$, to układ (*) ma jedyne rozwiązanie. Dane jest ono wzorami Cramera:

$$x_1 = \frac{\det(U, A_2, A_3)}{\det(A_1, A_2, A_3)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_1, U, A_3)}{\det(A_1, A_2, A_3)}, \quad x_3 = \frac{\det(A_1, A_2, U)}{\det(A_1, A_2, A_3)}.$$

Dowód.

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \det(A_1, A_2, A_3) \neq 0 \Rightarrow A_1, A_2, A_3$ lnz $\Rightarrow$ każdy $U \in \mathbb{R}^3$ da się jednoznacznie przedstawić jako kombinację liniową A_1, A_2, A_3 .

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 = U$$

$$\det(x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3, A_2, A_3) = \det(U, A_2, A_3)$$

$$x_1 \det(\underbrace{A_1, A_2, A_3}_{\substack{0 \\ \text{red}}}) + x_2 \det(\underbrace{A_2, A_2, A_3}_{\substack{0 \\ \text{red}}}) + x_3 \det(\underbrace{A_3, A_2, A_3}_{\substack{0 \\ \text{red}}}) = \det(U, A_2, A_3)$$

$$x_1 \det(A_1, A_2, A_3) = \det(U, A_2, A_3) \quad /: \det(A_1, A_2, A_3)$$

$$x_1 = \frac{\det(U, A_2, A_3)}{\det(A_1, A_2, A_3)}. \quad \text{Analogicznie postępujemy dla } x_2 \text{ i } x_3 \quad \square$$

Inna postać wzorów Cramera:

rozwijamy
względem
i-tej kolumny

$$\rightarrow \frac{|\begin{smallmatrix} \vdots & \overset{i}{\cancel{0}} & \vdots \end{smallmatrix} A|}{|A_1, A_2, A_3|} = x_i = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} u_j \left| \begin{smallmatrix} A \\ \vdots & \cancel{a_{ji}} & \vdots \end{smallmatrix} \right|$$

Wzory A_i - nie ma znaczenia.

$$AX=U$$

$$X=A^{-1}U$$

$$x_i = \sum_{j=1}^3 (A^{-1})_{ij} u_j$$

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A} (-1)^{i+j} \left| \begin{smallmatrix} A \\ \vdots & \cancel{a_{ji}} & \vdots \end{smallmatrix} \right|$$

Przykład.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad AX = U. \quad x_2 = ?$$

$$\det A = 2 \rightarrow$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left((-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (-1 \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + (-1) \cdot 3 \cdot 2) = \frac{1}{2} (-6 + 2 \cdot 6 - 6) = 0$$

Przestrzenie $\mathbf{R}^n$ i ich przekształcenia liniowe

$$\mathbf{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx_1 \\ tx_2 \\ \vdots \\ tx_n \end{pmatrix}$$

Definicja.

Funkcję $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ nazywamy *przekształceniem liniowym*, jeżeli

$$(\forall t, t' \in \mathbf{R})(\forall X, X' \in \mathbf{R}^n)(F(tX + t'X') = tF(X) + t'F(X'))$$

Przykład. Dla $A \in M_{k \times n}(\mathbf{R})$ określimy przekształcenie liniowe $F_A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$.

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, k \\ j=1, \dots, n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \quad F_A(X) = AX, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$AX = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}}_{\substack{\cap \\ M_{k \times n}(\mathbf{R})}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\substack{\cap \\ \mathbf{R}^n}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \end{pmatrix}}_{\substack{\cap \\ \mathbf{R}^k}}$$

$$(AX)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$$

Przykłady:

$$\bullet \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}; \quad F_A: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

$\cap$
 $M_{3 \times 2}(\mathbf{R})$

$$\begin{matrix} F_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \cap \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \\ 3x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad F_B: \mathbf{R}^1 \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

$F_B(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix}$

$$\bullet \quad C = (1 \ 2) \quad F_C: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^1$$

$F_C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 \ 2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 2y$