

Iloczyn wektorowy

Definicja. Iloczynem wektorowym wektorów $A, B \in \mathbf{R}^3$,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

nazywamy wektor

$$A \times B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Własności.

- 1) Iloczyn wektorowy jest dwuliniowy i antysymetryczny:

$$A \times (\beta B + \gamma C) = \beta A \times B + \gamma A \times C, \quad (\beta B + \gamma C) \times A = \beta B \times A + \gamma C \times A,$$

$$A \times B = -B \times A.$$

- 2) Iloczyn wektorowy jest prostopadły do swoich czynników:

$$A \times B \perp A, B.$$

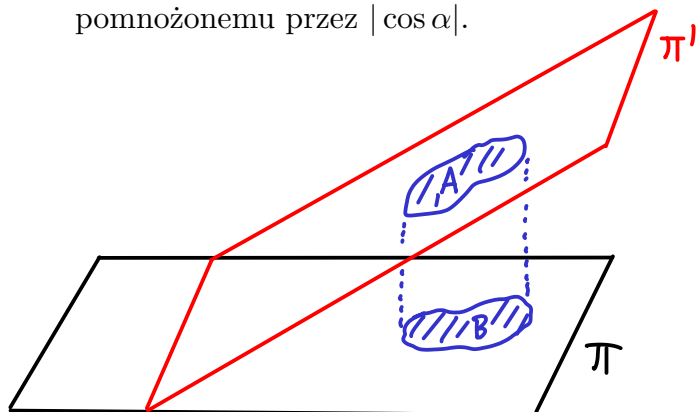
- 3) Długość $A \times B$ jest równa polu równoległoboku rozpiętego przez A i B :

$$\|A \times B\| = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \sin \angle(A, B).$$

- 4) Zwrot iloczynu wektorowego jest dany regułą śruby prawoskrętnej:

Lemat.

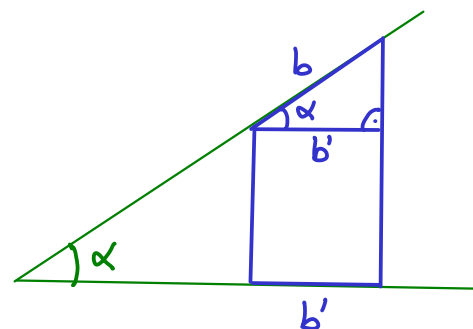
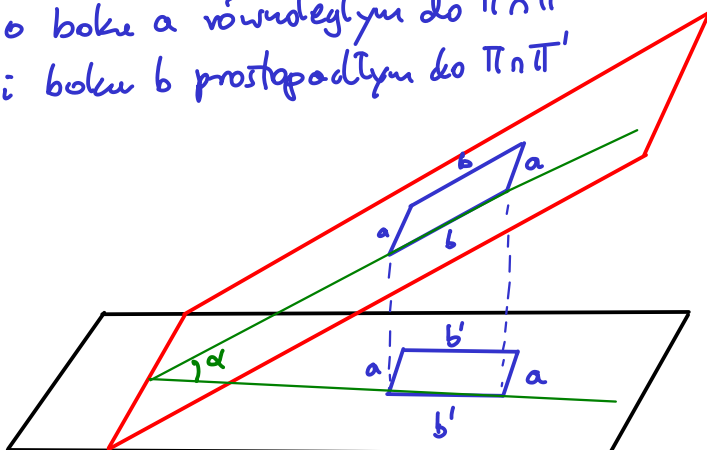
Niech π, π' będą płaszczyznami przecinającymi się pod kątem α . Niech A będzie figurą na płaszczyźnie π' . Wtedy pole rzutu prostokątnego A na π jest równe polu A pomnożonemu przez $|\cos \alpha|$.



$$\text{Pole } B = \text{Pole } A \cdot |\cos \angle(\pi, \pi')|$$

Prostokąt w π'

o boku a równoległym do $\pi \cap \pi'$
i boku b prostokątnym do $\pi \cap \pi'$



$$\cos \alpha = \frac{b'}{b}$$

$$b \cdot \cos \alpha = b'$$

Pole zmniejszonego prostokąta $= a \cdot b' = a b |\cos \alpha| = \text{Pole oryginalnego prostokąta} \cdot |\cos \alpha|$

Ogólniejsze figury przybliżamy rodzinami takich prostokątów.

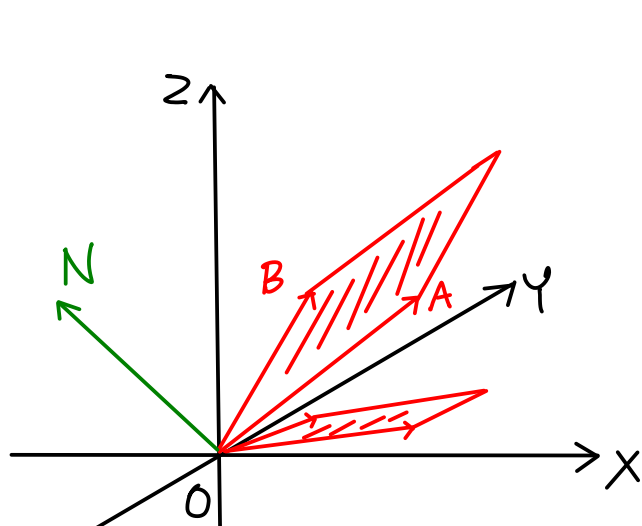
Długość iloczynu wektorowego $A \times B$

Niech π będzie płaszczyzną rozpiętą przez A i B (parametrycznie: $X = tA + sB$).

Niech $N = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ będzie jednostkowym wektorem normalnym π .

Niech α będzie kątem między π a płaszczyzną OXY .

Rozważmy rzut prostopadły równoległoboku rozpiętego przez A, B na OXY .



$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{rzt } \square(A, B) \text{ na } OXY = \square \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Pole } \square \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right|$$

$$\text{Pole } \square(A, B) \cdot |\cos \alpha|$$

$$|\cos \alpha| = |\cos \angle(\pi, OXY)| = |\cos \angle(N_\pi, N_{OXY})| = \left| \cos \angle \left(\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{\left\langle \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\|N\| \cdot \|E_3\|} \right| = \left| \frac{n_3}{1 \cdot 1} \right| = |n_3|$$

$$\left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right| = |n_3| \cdot \text{Pole } \square(A, B)$$

Analogicznie

$$\left| \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right| = |n_1| \cdot \text{Pole } \square(A, B)$$

$$\left| \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \right| = |n_2| \cdot \text{Pole } \square(A, B)$$

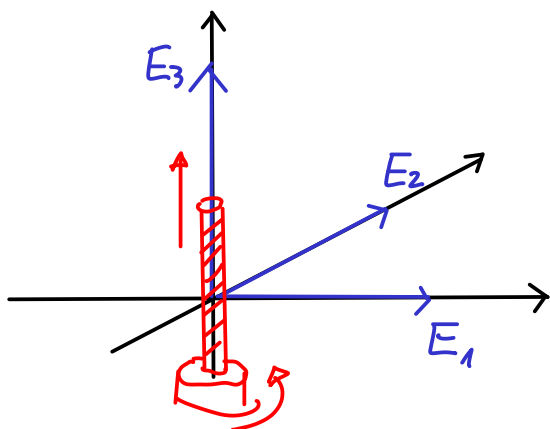
Podnosimy do kwadratu i dodajemy

$$\underbrace{\left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right|^2 + \left| \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right|^2 + \left| \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \right|^2}_{\|A \times B\|^2} = \underbrace{(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)}_{\|N\|^2 = 1} \cdot (\text{Pole } \square(A, B))^2$$

$$\|A \times B\| = \text{Pole } \square(A, B)$$

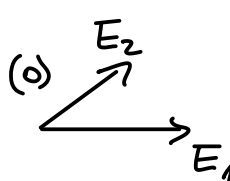
Reguła śruby

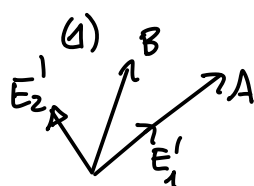
- Zgadza się dla wektorów E_1, E_2 :

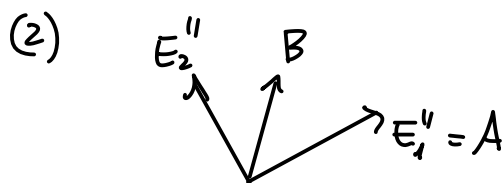


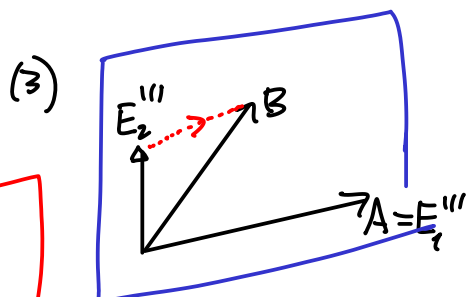
$$E_1 \times E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = E_3$$

- Do dowolnej pary (A, B) (wektorów o różnych kierunkach) można dojść z pary (E_1, E_2) przez ciągłą deformację (poprzez pary o różnych kierunkach).

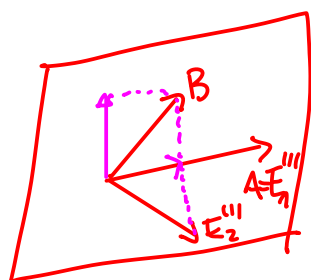
(0)  1) Obracamy wekt. E_2 wokół E_1 , tak, by E_2 przekształcić do pozycji o kierunku i zwrocie takim, jak A

(1)  2) rozciągamy / ściskamy E_1' tak by dojść do A .

(2) 

(3) 

3) Obracamy E_2''' wokół A , tak by po obrocie znalazł się w płaszczyźnie rozpiętej przez A, B , po tej samej stronie prostej $X=tA$ co wektor B



Liniowa niezależność

Definicja.

Wektory $X_1, X_2, \dots, X_k \in \mathbf{R}^3$ są *liniowo niezależne* (lnz), jeśli

$$(1) \quad \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

Równoważnie: (2) żaden z tych wektorów nie da się przedstawić jako kombinacja liniowa pozostałych.

Przykład:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2X_1 - 3X_2 = 2X_1 + (-3) \cdot X_2 = X_3 \quad \left(\begin{array}{l} \text{warunek (2) nie jest spełniony;} \\ \text{wektory są lnz} \end{array} \right)$$

$$2 \cdot X_1 + (-3) \cdot X_2 + (-1) \cdot X_3 = 0$$

nietrywialne przedstawienie zera $\Rightarrow$ (1) nie zachodzi

Przykład:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Czy: } \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 ?$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 0 & \leadsto \alpha_3 = \alpha_1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 & \leadsto \alpha_2 = -2\alpha_1 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 & \leftarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_3 = \alpha_1 & \xrightarrow{\quad} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = -2\alpha_1 & \xrightarrow{\quad} \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 - 4\alpha_1 + 3\alpha_1 = 0 & \Rightarrow \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$
(1) jest spełniony

X_1, X_2, X_3 są lnz.

Równoważność warunków (1) i (2):

(1) $\Rightarrow$ (2) (nie wprost) Gdyby pewne X_i było kombinacją pozostałych:

$$X_i = \sum_{j \neq i} \beta_j X_j \quad \text{Wtedy:}$$

$$(-\beta_1)X_1 + (-\beta_2)X_2 + \dots + (-\beta_{i-1})X_{i-1} + \underbrace{1 \cdot X_i}_{=0} + (-\beta_{i+1})X_{i+1} + \dots + (-\beta_k)X_k = 0$$

Nietrywialna kombinacja dająca wektor 0 - $\nexists$ z (1).

(2) $\Rightarrow$ (1) (nie wprost) Gdyby (1) nie zachodziło, to pewna nietrywialna kombinacja $X_1, \dots, X_k$ dawałaby 0:

$$\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k = 0, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}, \text{ pewne } \alpha_i \neq 0$$

$$\alpha_i X_i = \sum_{j \neq i} (-\alpha_j) X_j \quad / : \alpha_i$$

$$X_i = \sum_{j \neq i} \left(-\frac{\alpha_j}{\alpha_i} \right) X_j$$

X_i jest kombinacją
liniową pozostałych
- wbrew (2), $\nexists$

□

Liniowa niezależność

$k = 0$. Pusty układ wektorów jest lnz.

$k = 1$. X_1 jest lnz $\iff X_1 \neq 0$.

$k = 2$. X_1, X_2 są lnz $\iff$ są niewspółliniowe: $(\forall t \in \mathbf{R})(X_1 \neq tX_2 \wedge X_2 \neq tX_1)$.

$k = 3$. X_1, X_2, X_3 są lnz $\iff X_1, X_2$ są lnz, zaś X_3 nie leży w płaszczyźnie $X = tX_1 + sX_2$
 $\iff 0, X_1, X_2, X_3$ nie leżą w jednej płaszczyźnie.

Idea:

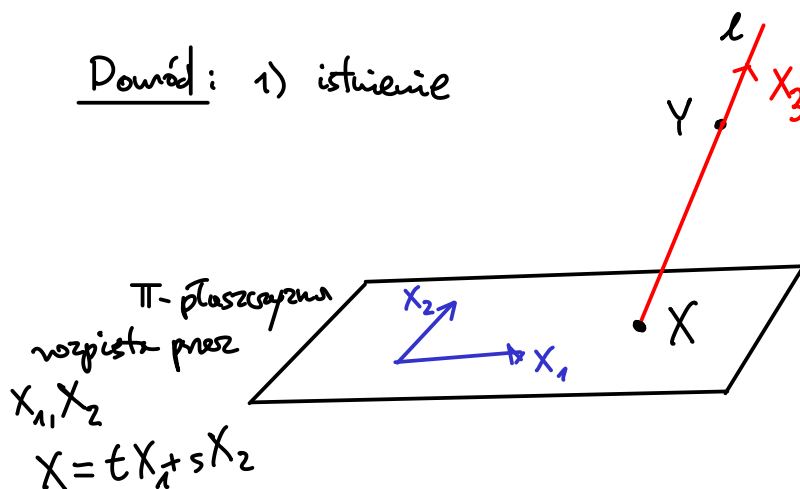
$X_1, X_2, \dots, X_k$ są lnz $\iff$ zbiór $X = t_1X_1 + t_2X_2 + \dots + t_kX_k$ jest k -wymiarowy.

Twierdzenie.

Jeśli $X_1, X_2, X_3 \in \mathbf{R}^3$ są lnz, to dla każdego $Y \in \mathbf{R}^3$ istnieje jedyna trójka skalarów t_1, t_2, t_3 , taka że

$$Y = t_1X_1 + t_2X_2 + t_3X_3.$$

Dowód: 1) istnienie



prosta l przechodząca przez Y ,
o kierunku X_3

X_1, X_2, X_3 lnz

$\Downarrow$

l nie jest równoległa do Π

$\Downarrow$

istnieje $X \in l \cap \Pi$

$$tX_1 + sX_2 = X = Y + uX_3$$

$$tX_1 + sX_2 = Y + uX_3$$

$$Y = tX_1 + sX_2 + (-u)X_3$$

2) Jednoznaczność

$$Y = t_1X_1 + t_2X_2 + t_3X_3 = s_1X_1 + s_2X_2 + s_3X_3$$

$$(t_1 - s_1)X_1 + (t_2 - s_2)X_2 + (t_3 - s_3)X_3 = 0$$

$\Downarrow X_1, X_2, X_3$ lnz

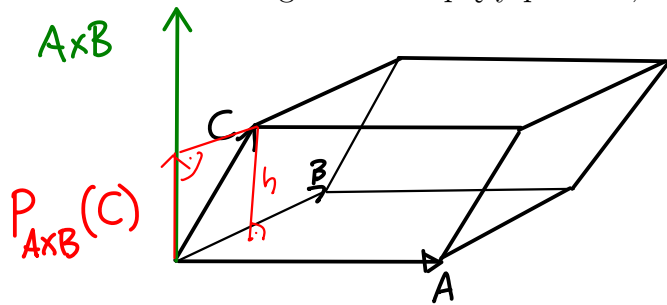
$$t_1 - s_1 = t_2 - s_2 = t_3 - s_3 = 0$$

$$t_1 = s_1, t_2 = s_2, t_3 = s_3$$

□

Fakt. Wektory $A, B \in \mathbb{R}^3$ są lnz $\iff$ pole równoległoboku rozpiętego przez A, B jest niezerowe $\iff A \times B \neq 0$.

Równoległościan rozpięty przez A, B, C : $\text{Równoległościan}(A, B, C) = \{ tA + sB + uC : t, s, u \in [0, 1] \}$



Objętość $\text{Równoległościan}(A, B, C)$

$\parallel$
Pole podstawy $\cdot$ wysokość

$\parallel$
Pole $\square(A, B) \cdot \parallel P_{A \times B} C \parallel$

$$\parallel A \times B \parallel \cdot \left\| \frac{\langle A \times B, C \rangle}{\parallel A \times B \parallel^2} A \times B \right\|$$

$$\parallel$$

$$|\langle A \times B, C \rangle|$$

$$\text{Objętość } \text{Równoległościan}(A, B, C) = |\langle A \times B, C \rangle|$$