

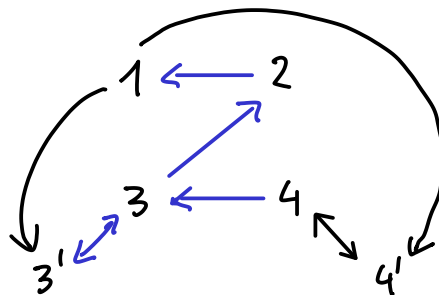
Odwracalność

Twierdzenie.

Niech $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie liniowe. Następujące warunki są równoważne.

- 1) F jest odwracalne.
- 2) $\det F \neq 0$.
- 3) $\ker F = \{0\}$
- 3') F jest 1-1.
- 4) $\operatorname{Im} F = \mathbb{R}^3$.
- 4') F jest surjekcją (jest "na").

Dowód.



$3' \Rightarrow 3$

Zauważmy, że $F(0) = 0$ (F -liniowe).

Niech $X \in \ker F$; wtedy $F(X) = 0$. Ale, skoro F jest 1-1: $F(X) = F(0)$, to $X = 0$
 tzn. $\ker F = \{0\}$.

$3 \Rightarrow 3'$

Niech $X, X' \in \mathbb{R}^3$, $F(X) = F(X')$. Chcemy pokazać, że wtedy $X = X'$.

$$F(X) - F(X') = 0$$

$$F(X - X') = 0$$

$$X - X' \in \ker F \stackrel{(3)}{=} \{0\} \quad \text{— więc } X - X' = 0, X = X'.$$

$2 \Rightarrow 1$ ($\det F \neq 0 \Rightarrow F$ odwracalne). To jest tw. o ułtódach Cramera.

Chcemy: $\forall Y \in \mathbb{R}^3 \exists! X \in \mathbb{R}^3 F(X) = Y$ niech $A = m(F)$
 —||— —||— $AX = Y$ wiemy, że $\det A = \det F \neq 0$.

Tera wynika z tw. o ułtódach cramerowskich.

$4 \Rightarrow 3$ ($\operatorname{Im} F = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \ker F = \{0\}$)

$\operatorname{Im} F = \mathbb{R}^3 \Rightarrow (\exists X, Y, Z \in \mathbb{R}^3) (F(X), F(Y), F(Z) \text{ są l.u.z.})$
 wywnioskujemy, że X, Y, Z są l.u.z.: (gdyby up. $X = tY + sZ$, to
 $F(X) = tF(Y) + sF(Z)$ — sprzeczność)

Weźmy $W \in \ker F$; $W = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$ dla pewnych $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\begin{matrix} F \downarrow \\ 0 = F(W) = \alpha F(X) + \beta F(Y) + \gamma F(Z) \end{matrix} \xrightarrow{F(X), F(Y), F(Z) \text{ l.u.z.}} \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$W = \alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0 \cdot X + 0 \cdot Y + 0 \cdot Z = 0$$

Zatem $\ker F = \{0\}$.

$(3 \Rightarrow 2) \text{ (ker } F = \{0\} \Rightarrow \det F \neq 0)$

Niech $m(F) = A = (A_1, A_2, A_3)$. $\det A = \det (A_1, A_2, A_3)$.

Pokażemy, że A_1, A_2, A_3 są l.u.z. - stąd wynika teza.

$$t_1 A_1 + t_2 A_2 + t_3 A_3 = 0$$

$$F \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = (A_1, A_2, A_3) \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \in \ker F = \{0\} \Rightarrow t_1 = t_2 = t_3 = 0 \Rightarrow A_1, A_2, A_3 \text{ l.u.z.}$$

□

Jak liczyć macierz odwrotną?

I)

$$AX = Y \iff X = A^{-1}Y$$

Przykład. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} =$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = y_1 \\ 2x_1 + x_2 = y_2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_3 \end{cases}$$

rozwiązujemy

$$\begin{cases} x_1 = \dots \frac{3}{2}y_1 - y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 = \dots \\ x_3 = \dots \end{cases}$$

$$(A \mid I)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -2[1] \\ -3[1] \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) -2[2]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \times \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \begin{array}{l} +[3] \\ -2[3] \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$(I \mid A^{-1})$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -3 & 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

metoda bezwyznacznikowa.

Inne sposoby

II) Wzory Cramera: jeśli $AX = Y$, to

$$x_i = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} \left| \begin{array}{cc} \overset{A}{\text{---}} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{array} \right| y_j$$

Porównując to z wersją $x_i = \sum_{j=1}^3 (A^{-1})_{ij} y_j$ wzoru $X = A^{-1}Y$ dostajemy

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} \left| \begin{array}{cc} \overset{A}{\text{---}} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{array} \right|$$

lub, z użyciem iloczynu wektorowego:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A_2 \times A_3, A_3 \times A_1, A_1 \times A_2)^\top$$