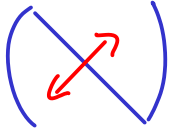


Macierze i przekształcenia symetryczne.

Definicja.

- 1) Macierz $A \in M_{n \times n}(\mathbf{R})$ jest symetryczna, jeśli $A = A^T$. ($A_{ij} = A_{ji}$)
- 2) Liniowe $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ jest symetryczne, jeśli $m(F)$ jest symetryczna.



Fakty. Niech A będzie macierzą $n \times n$.

- 1) $(\forall X, Y \in \mathbf{R}^n)(\langle AX, Y \rangle = \langle X, A^T Y \rangle)$.

$$\langle AX, Y \rangle = (AX)^T Y = X^T A^T Y = X^T (A^T Y) = \langle X, A^T Y \rangle$$

- 2) A jest symetryczna $\iff (\forall X, Y \in \mathbf{R}^n)(\langle AX, Y \rangle = \langle X, AY \rangle)$.

$$\Rightarrow (2.1)$$

$$\Leftarrow A_{ij} = \langle A_j, E_i \rangle = \langle AE_j, E_i \rangle = \langle E_j, AE_i \rangle = \langle E_j, A_i \rangle = A_{ji}$$

- 3) Liniowe $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ jest symetryczne $\iff (\forall X, Y \in \mathbf{R}^n)(\langle F(X), Y \rangle = \langle X, F(Y) \rangle)$.

(preformułowanie 2))

Przykład.

Rzut prostopadły na prostą. (przechodzący przez 0) $P = P_\ell$

Lemat: Jeśli wektor U ma kierunek prostej ℓ , to

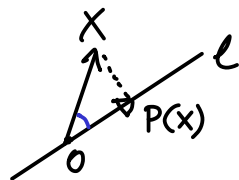
$$\forall X \quad \langle X, U \rangle = \langle P(X), U \rangle$$

Dł:

$$\langle P(X), U \rangle = \|P(X)\| \cdot \|U\| \cdot \underbrace{\cos \angle(P(X), U)}_0 = \|P(X)\| \cdot \|U\|$$

$$\langle X, U \rangle = \underbrace{\|X\|}_{\frac{\|P(X)\|}{\|U\|}} \cdot \underbrace{\|U\|}_{\|U\|} \cdot \cos \angle(X, U) = \|P(X)\| \cdot \|U\|$$

$$\langle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ma kierunek } \ell}}{P(X)}, Y \rangle = \langle P(X), \underset{\substack{\uparrow \\ P(Y) \text{ ma kierunek } \ell}}{P(Y)} \rangle = \langle X, P(Y) \rangle$$



□

Twierdzenie spektralne

Twierdzenie. (spektralne, w $\mathbf{R}^3$)

Symetryczne przekształcenie $\mathbf{R}^3$ ma ortonormalną bazę wektorów własnych.

(Dla każdej symetrycznej macierzy $A \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$ istnieją jednostkowe parami prostopadłe wektory własne X, Y, Z .)

Wniosek.

Niech $P = (X, Y, Z)$ – jest to macierz izometrii. Niech λ, μ, η będą wartościami własnymi A odpowiadającymi wektorom X, Y, Z . Wtedy

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Dowód twierdzenia.

Niech $F = F_A$ będzie symetrycznym przekształceniem $\mathbf{R}^3$.

Niech X będzie jednostkowym wektorem własnym F o wartości własnej λ .

Lemat.

$$U \perp X \Rightarrow F(U) \perp X$$

D-d. (lematu) : $\langle F(U), X \rangle = \langle U, F(X) \rangle = \langle U, \lambda X \rangle = \lambda \langle U, X \rangle = \lambda \cdot 0 = 0 \quad \square$

Z lematu wynika, że F zachowuje płaszczyznę $\pi = X^\perp = \{U \in \mathbf{R}^3 \mid U \perp X\}$.

Niech G będzie ograniczeniem F do π .

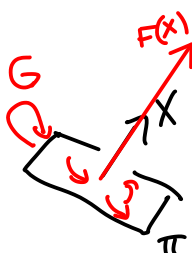
Zauważmy, że G jest symetrycznym przekształceniem π :

$$(\forall U, V \in \pi)(\langle G(U), V \rangle = \langle U, G(V) \rangle).$$

Z twierdzenia spektralnego w $\mathbf{R}^2$ wiemy, że istnieje ortonormalna baza Y, Z płaszczyzny π złożona z wektorów własnych G .

Trójka (X, Y, Z) spełnia tezę twierdzenia.

+ będzie
trudne w $\mathbf{R}^9 \rightarrow$



Fakt.

Niech X, Y będą wektorami własnymi symetrycznego przekształcenia F odpowiadającymi różnym wartościom własnym λ, μ . Wtedy $X \perp Y$.

$$\left. \begin{array}{ll} \langle F(X), Y \rangle = \langle X, F(Y) \rangle \\ \langle \lambda X, Y \rangle & \langle X, \mu Y \rangle \\ \lambda \langle X, Y \rangle & \mu \langle X, Y \rangle \end{array} \right\} \xrightarrow{\lambda \neq \mu} \langle X, Y \rangle = 0$$

Przykład. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ($\chi_A(x) = \dots$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ jest w. własnym } A \text{ odp. w. własnej } 5.$$

Poszukamy innych wektorów własnych w płaszczyźnie prostopadłej do $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Weźmy $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ spełniający $x+y+z=0$. ($\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+2z \\ 2x+y+2z \\ 2x+2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Każdy wektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ jest w. własnym A z w. własną -1 .

np. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ są w. własnymi.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} ; \quad \chi_A(x) = -(x-5)(x+1)^2$$

Diagonalizacja w bazie ortonormalnej:

$$X = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, Z = X \times Y = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ baza ON złożona z wektorów własnych}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Formy kwadratowe

Definicja. Funkcję $Q: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ postaci

$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz, \quad (a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}),$$

nazywamy *formą kwadratową*.

Zauważmy, że

$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x \ y \ z) \underbrace{\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}}_{m(Q)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$m(Q)$ - macierz formy kwadratowej Q .

$$Q(X) = X^T m(Q) X = \langle m(Q) X, X \rangle \quad \left(= (m(Q)X)^T X = X^T \underbrace{m(Q)^T}_{m(Q)} X \right)$$

Fakt.

Dla każdej formy kwadratowej Q istnieje jedyna macierz symetryczna A (zwana macierzą formy Q i oznaczana $m(Q)$), taka że

$$(\forall X \in \mathbf{R}^3)(Q(X) = \langle AX, X \rangle).$$

Przykład.

$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xy + yz \qquad m(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalizacja form kwadratowych

Twierdzenie.

Niech Q będzie formą kwadratową na $\mathbf{R}^3$. Istnieje liniowy prostokątny układ współrzędnych (x', y', z') w którym Q dana jest wzorem

$$\lambda(x')^2 + \mu(y')^2 + \eta(z')^2$$

dla pewnych $\lambda, \mu, \eta \in \mathbf{R}$.

(Mówimy, że Q diagonalizuje się w tym układzie.)

Dowód.

Niech $A = m(Q)$.

Tw. spektralne daje nam bazę ortonormalną (U, V, W) wektorów własnych A ;

niech λ, μ, η będą odpowiadającymi im wartościami własnymi,

zaś (x', y', z') liniowym prostokątnym układem współrzędnych związanym z tą bazą.

$$\begin{aligned} Q(X) &= X^T A X = X^T P D P^{-1} X = X^T (P^{-1})^T D P^{-1} X \stackrel{(*)}{=} \underbrace{(P^{-1} X)^T}_{\substack{\uparrow \\ X'}} D \underbrace{(P^{-1} X)}_{\substack{\uparrow \\ X'}} = \\ &= (X')^T D X' = (x' \ y' \ z') \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \lambda(x')^2 + \mu(y')^2 + \eta(z')^2 \end{aligned}$$

$\leftarrow P = (U, V, W)$ - macierz izometrii, $P^{-1} = P^T$

□

Fakt $(MN)^T = N^T M^T$

D-d: $((MN)^T)_{ij} = (MN)_{ji} = \sum_{\ell} M_{j\ell} N_{\ell i} =$
 $(N^T M^T)_{ij} = \sum_{\ell} (N^T)_{i\ell} (M^T)_{\ell j} = \sum_{\ell} N_{\ell i} M_{j\ell}$

□

Wniosek.

Powierzchnia w $\mathbf{R}^3$ dana równaniem

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = g$$

jest, w odpowiednio dobranym liniowym prostokątnym układzie współrzędnych, opisana równaniem postaci

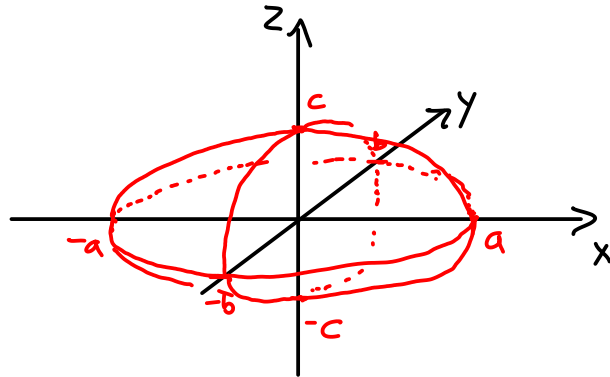
$$\lambda(x')^2 + \mu(y')^2 + \eta(z')^2 = g$$

Przykłady powierzchni stopnia 2

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sfera o środku 0 i promieniu 1



2) $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \quad (a, b, c > 0)$
 elipsoida o półosiach a, b, c



3) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$

$x^2 - (y^2 + z^2) = 1$

kwadrat odległości
punktu $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ od osi OX

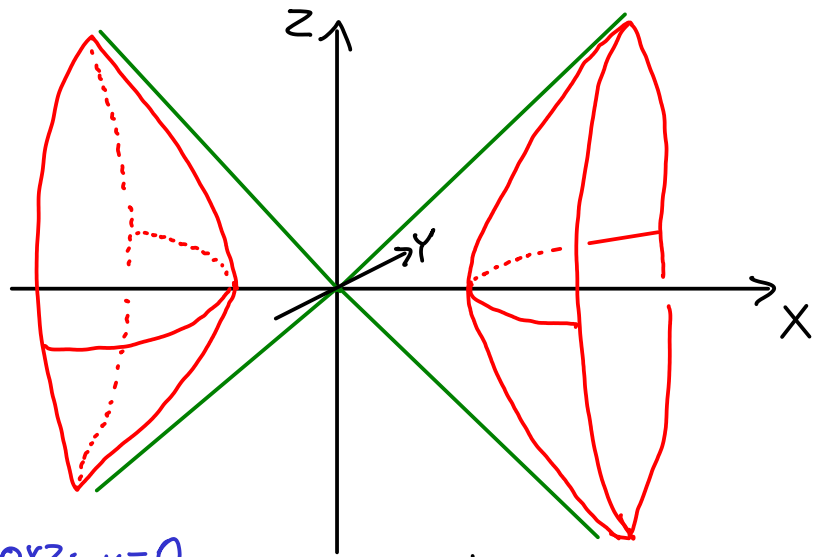
nasza powierzchnia
ma symetrię obrotową
względem osi OX

ta powierzchnia może być
zbudowana przez obracanie
swojego przekroju z pł. OXZ
wokół osi OX

$\Rightarrow$

pł. OXZ: $y=0$
 przekrój:
 $x^2 - z^2 = 1$

hiperboloidea
dwupowłokowa



$$3') \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

$$I \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{c}{a}$$

$$II \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$

β, γ - kąty

połówzwarcia

stożka asymptotycznego.

