

1. Zbadaj, czy krzywizna powierzchni opisanej parametrycznie $\{(r \cos(z), r \sin(z), z) \mid r, z \in \mathbf{R}\}$ jest zerowa.
2. Krzywą $\{(x, f(x), 0)\}$ obracamy w $\mathbf{R}^3$ wokół osi OX . Policz krzywiznę Gaussa powstałej powierzchni obrotowej. Uzasadnij, że “tworzące” tej powierzchni (krzywe będące obrazami wyjściowej przez obroty) są styczne do jednego z kierunków głównych.
3. Podobnie jak w poprzednim zadaniu obracamy krzywą wokół osi OX , ale tym razem parametryzujemy ją długością łuku: $\gamma(t) = (f(t), g(t), 0)$, $f'(t)^2 + g'(t)^2 = 1$. Uzasadnij, że wtedy $K = -g''/g$. Korzystając z tego wzoru opisz powierzchnie obrotowe o krzywiznie $-1, 0, 1$.
4. Sprawdź, że powierzchnie $P(s, t) = (s \cos t, s \sin t, \log s)$ i $Q(s, t) = (s \cos t, s \sin t, t)$ mają w $P(s, t)$ i $Q(s, t)$ równe krzywizny Gaussa, mimo że $Q(s, t) \mapsto P(s, t)$ nie jest lokalną izometrią.
5. Uzasadnij, że każda zwarta powierzchnia w $\mathbf{R}^3$ ma punkt o dodatniej krzywiznie Gaussa.
6. Udowodnij, że w $\mathbf{R}^3$ nie ma zwartych powierzchni o krzywiznie średniej 0. [Krzywizna średnia to średnia arytmetyczna krzywizn głównych; powierzchnie o krzywiznie średniej 0 nazywamy minimalnymi.]
7. Niech $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}^3$ będzie krzywą, taką że $\gamma'(t)$ i $\gamma''(t)$ są – dla każdego t – liniowo niezależne. Określmy $\Gamma: (a, b) \times (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbf{R}^3$ wzorem $\Gamma(t, s) = \gamma(t) + s\gamma'(t)$ (opisz ten przepis słowami). Pokaż, że Γ jest immersją, a krzywizna Gaussa (obrazu) Γ wynosi 0. [Powierzchnie tej postaci nazywamy *stycznościowo rozwijalnymi*.]
8. Niech M będzie dwuwymiarową zorientowaną rozmaitością riemannowską. Na zbiorze mapowym U ze współrzędnymi (x, y) (zgodnymi z orientacją) określamy formę $\omega_U = \sqrt{G(\partial_x, \partial_y)} dx \wedge dy$, gdzie $G(X, Y) = \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle \langle Y, X \rangle$ jest wyznacznikiem Grama. Uzasadnij, że kolekcja ω_U jest dobrze określoną formą na M . Przekonaj się, że jeśli M jest podrozmaitością $\mathbf{R}^3$, to tak określona forma pokrywa się z formą pola dA .
9. Odwzorowaniem Gaussa powierzchni $M \subset \mathbf{R}^3$ nazywamy funkcję $n: M \rightarrow S^2$ przypisującą punktowi M koniec jednostkowego wektora normalnego do M w tym punkcie. Zauważ, że $T_p M = T_{n(p)} S^2$. Uzasadnij, że $K = \det(Dn)$. Wykaż, że jeśli n jest różnowartościowe, to $\int_M K dA$ jest równe $\pm$ polu $n(M)$. [Jeśli chcesz, możesz dodatkowo założyć, że K nigdzie się nie zeruje.]
10. Uzasadnij, że jeśli zwarta powierzchnia M jest ściśle wypukła (tzn. ogranicza ściśle wypukły zwarty podzbiór $\mathbf{R}^3$), to $\int_M K dA = 4\pi$. [Możesz dla uproszczenia założyć, że K nigdzie się nie zeruje.]
11. Oblicz $\int_M K dA$ gdy M jest standardowo włożonym w $\mathbf{R}^3$ torusem.
12. (Tw. Hadamarda) Niech M^2 będzie spójną i zwartą rozmaitością, immersjonowaną w $\mathbf{R}^3$ tak, że $K > 0$ w każdym jej punkcie. Udowodnij, że
 - a) $n: M \rightarrow S^2$ jest nakryciem;
 - b) $n: M \rightarrow S^2$ jest dyfeomorfizmem;
 - c) immersja M w $\mathbf{R}^3$ jest włożeniem;
 - d) obraz M w $\mathbf{R}^3$ jest powierzchnią wypukłą.
13. (Lemat Hilberta) Jeśli $k_1(p) > k_2(p)$, przy czym k_1 ma maksimum w p , a k_2 ma minimum w p , to $K(p) \leq 0$.
 - a) Niech (X, Y) będzie reperem ortonormalnym kierunków głównych na otoczeniu p ($SX = k_1 X$, $SY = k_2 Y$). Niech $\nabla_X Y = aX$, $\nabla_Y X = bY$ dla pewnych funkcji a, b . Wylicz, że $K = -X(b) - Y(a) - (a^2 + b^2)$.
 - b) Użyj równań Codazziego i warunków $X_p(X(k_2)) \geq 0$, $Y_p(Y(k_1)) \leq 0$ by pokazać, że $X_p(b) \geq 0$, $Y_p(a) \geq 0$.
14. (Tw. Liebmanna) Spójna zwarta powierzchnia w $\mathbf{R}^3$ o stałej krzywiznie Gaussa jest sferą.
15. (Tw. Hilberta) Nie ma zupełnych powierzchni M w $\mathbf{R}^3$ o stałym $K = -1$.
 - a) W otoczeniu każdego punktu takiej powierzchni istnieje *sieć Czebyszewa*: immersja $g: (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, taka że wszystkie krzywe postaci $x \mapsto g(x, y)$ i $y \mapsto g(x, y)$ są sparametryzowane długością łuku a ich wektory styczne są izotropowe względem drugiej formy podstawowej.
 - b) Istnieje sieć Czebyszewa $g: \mathbf{R}^2 \rightarrow M$. [Tu należy użyć zupełności.]
 - c) Niech $\omega(x, y)$ oznacza kąt między wektorami $Dg(\partial_x)$, $Dg(\partial_y)$ w $T_{g(x, y)} M$ (tak więc $\omega: \mathbf{R}^2 \rightarrow (0, \pi)$); wtedy $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = (-K) \sin \omega$.
 - d) Nie istnieje funkcja $\omega: \mathbf{R}^2 \rightarrow (0, \pi)$ spełniająca równanie $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = \sin \omega$.