Formy kwadratowe

Założenia: $\dim V = n < \infty$, $1 + 1 \neq 0$.

Definicja

Forma kwadratowa na V to funkcja $Q\colon V \to K$, taka że dla pewnej bazy $B = (b_1, \dots, b_n)$ przestrzeni V zachodzi

$$(*) \qquad \forall \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in K^n \qquad Q(\sum_{i=1}^{n} x^i b_i) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} x^i x^j.$$

Równoważnie: $(\exists\, \mathrm{baza}\, B)(\exists A \in M_{n\times n}(K))(\forall v \in V)$

$$Q(v) = [v]_B^\top A [v]_B$$

Wyjaśnienie:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} x^i x^j = \sum_i x^i (\sum_j A_{ij} x^j)$$
$$= (x^1, \dots, x^n) \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Przykłady:

$Q_1 \binom{x}{y} = x^2 + y^2$

$Q_2 \binom{x}{y} = xy (= 2xy - yx = \dots)$

$$Q_3(P) = \int_0^1 P(x)^2 dx = \int_0^1 (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i)^2 dx$$
$$= \int_0^1 \sum_{i,j=0}^{n} a_i a_j x^{i+j} dx = \sum_{i,j=0}^{n} (\int_0^1 x^{i+j} dx) a_i a_j$$

Lemat 1

Niech Q będzie formą kwadratową na V, B – bazą V dla której zachodzi $(*)$. Wtedy istnieje jedyna symetryczna macierz $A = (A_{ij})$ dla której zachodzi $(*)$.

Symetryczność: $A = A^\top, A_{ij} = A_{ji}$.

Tę jedyną macierz nazywamy *macierzą formy Q w bazie B* i oznaczamy $m^{BB}(Q)$.

Dowód: $a'_{ij} = \frac{A_{ij}+A_{ji}}{2}$ spełnia tezę.
Jeśli (c_{ij}) też spełnia tezę, to: $\forall x^i \quad \sum a'_{ij}x^i x^j = \sum c_{ij}x^i x^j$

- Niech $x^k = 1$, $x^s = 0$ dla $s \neq k$: $a'_{kk} = c_{kk}$.
- Niech $x^k = x^\ell = 1$, $x^s = 0$ dla $s \neq k, \ell$:

$$a'_{kk} + a'_{k\ell} + a'_{\ell k} + a'_{\ell\ell} = c_{kk} + c_{k\ell} + c_{\ell k} + c_{\ell\ell}.$$
$$2a'_{k\ell} = 2c_{k\ell}.$$
◇

Przykład
$m^{EE}(Q_1) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$
$Q_2\binom{x}{y} = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}yx, \quad m^{EE}(Q_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Lemat 2
Niech $Q\colon V \to K$ będzie formą kwadratową. Dla dowolnej bazy B' przestrzeni V istnieje jedyna symetryczna macierz A' taka że

$$\forall v \in V \qquad Q(v) = [v]^\top_{B'} A' [v]_{B'}$$

Dowód: Niech $A = m^{BB}(Q)$, $P = m^{B'}_B(id)$.
$Q(v) = [v]^\top_B A[v]_B = (P[v]_{B'})^\top A(P[v]_{B'}) = [v]^\top_{B'} P^\top AP[v]_{B'}$.
Kładziemy $A' = P^\top AP$.
(symetryczność: $(P^\top AP)^\top = P^\top A^\top (P^\top)^\top = P^\top AP$).
Jedyność wynika z lematu 1. ◇

Wniosek (z dowodu): $m^{B'B'}(Q) = (m^{B'}_B(id))^\top m^{BB}(Q) m^{B'}_B(id)$.

Definicja

Mówimy, że forma Q *diagonalizuje się* w bazie B, jeśli $m^{BB}(Q)$ jest diagonalna, tzn. jeśli

$$Q(\sum x^i b_i) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}(x^i)^2$$

Przykład

$x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2$

$xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$

Twierdzenie (Lagrange)

Każda forma kwadratowa diagonalizuje się w pewnej bazie.

Dowód: Forma $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}x^i x^j$, $A_{ij} = A_{ji}$. Indukcja względem n.

• $(\exists i)(A_{ii} \neq 0)$. Bzo: $A_{11} \neq 0$.

$$\begin{aligned}\sum A_{ij}x^i x^j &= A_{11}(x^1)^2 + \sum_{i=2}^{n} 2A_{1i}x^1 x^i + \sum_{i,j=2}^{n} A_{ij}x^i x^j \\ &= A_{11}(x^1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{A_{1i}}{A_{11}}x^i)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} A'_{ij}x^i x^j\end{aligned}$$

• $(\forall i)(A_{ii} = 0)$. Wybieramy i, j tak, by $A_{ij} \neq 0$. Bzo: $i = 1$, $j = 2$. Kładziemy $x'^1 = \frac{x^1+x^2}{2}$, $x'^2 = \frac{x^1-x^2}{2}$, tzn. $x^1 = x'^1 + x'^2$, $x^2 = x'^1 - x'^2$.

$$2A_{12}x^1x^2 = 2A_{12}(x'^1 + x'^2)(x'^1 - x'^2) = 2A_{12}(x'^1)^2 - 2A_{12}(x'^2)^2$$

i stosujemy część pierwszą do formy zapisanej w $x'^1, x'^2, x^3, \ldots, x^n$. $\diamond$

Definicja

Formą dwuliniową związaną z formą kwadratową $Q\colon V \to K$ nazywamy dwuliniowe odwzorowanie $\mathcal{Q}\colon V \times V \to K$ dane wzorem

$$\mathcal{Q}(v, w) = [v]_B^\top m^{BB}(Q)[w]_B$$

Odróżniamy $\mathcal{Q}$ od Q po liczbie argumentów.

Lemat 3 (wzór polaryzacyjny)
$\mathcal{Q}(v, w) = \frac{1}{2}(Q(v + w) - Q(v) - Q(w))$.
W szczególności $\mathcal{Q}(v, w)$ nie zależy od wyboru bazy B.

Dowód: Niech $A = m^{BB}(Q)$, $X = [v]_B$, $Y = [w]_B$. Wtedy

$$\begin{aligned} Q(v + w) - Q(v) - Q(w) &= (X + Y)^\top A(X + Y) - X^\top AX - Y^\top AY \\ &= X^\top AY + Y^\top AX = 2X^\top AY = 2\mathcal{Q}(v, w) \end{aligned}$$

Uwagi:
- $Q(v) = \mathcal{Q}(v, v)$. (z definicji)
- $\mathcal{Q}(v, w) = \mathcal{Q}(w, v)$ (ze wzoru polaryzacyjnego)

Przykład:

1. $Q_1\binom{x}{y} = x^2 + y^2$; $m^{EE}(Q_1) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$;
   $\mathcal{Q}_1(\binom{x}{y}, \binom{x'}{y'}) = (x\,y)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\binom{x'}{y'} = xx' + yy'$.
2. $Q_3(P) = \int_0^1 P(x)^2 dx$
   $\mathcal{Q}_3(P, Q) = \frac{1}{2}(\int_0^1 (P(x) + Q(x))^2 dx - \int_0^1 P(x)^2 dx - \int_0^1 Q(x)^2 dx) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$.

Od teraz $K = \mathbf{R}$.

Definicja

Forma $Q\colon V \to \mathbf{R}$ jest dodatnio określona, jeśli jest dodatnia na każdym niezerowym wektorze. Macierz jest dodatnio określona, jeśli jest macierzą formy dodatnio określonej. Tzn. A jest dodatnio określona, jeśli $A^\top = A$ oraz dla każdego niezerowego X mamy $X^\top AX > 0$.

Przykłady

1) $x^2 - xy + y^2 = (x - \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2$ jest dodatnio określona na $\mathbf{R}^2$.
2) Kiedy $Q\binom{x}{y} = ax^2 + 2bxy + cy^2$ jest dodatnio określona na $\mathbf{R}^2$?

   $0 < Q\binom{1}{0} = a$: czyli $a > 0$

   $0 < Q\binom{x}{y} = a(x + \frac{b}{a}y)^2 + (c - \frac{b^2}{a})y^2$: czyli $ac - b^2 > 0$

   $A = m^{EE}(Q) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$, $ac - b^2 = \det A$.
3) Macierz diagonalna jest dodatnio określona $\iff$ jej wyrazy na przekątnej są dodatnie.

   $$[\ (\forall \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \neq 0)(\sum_{i=1}^{n} d_i(x^i)^2 > 0) \iff (\forall i)(d_i > 0)\ ]$$

Twierdzenie (kryterium Sylvestera)

Niech Q będzie formą kwadratową, $m^{BB}(Q) = A = (A_{ij})_{i,j=1}^{n}$. Wówczas Q jest dodatnio określona $\iff$ wszystkie minory główne A są dodatnie: $\det((A_{ij})_{i,j=1}^{k}) > 0$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$.

Dowód ($\Rightarrow$)

Q diagonalizuje się: $A = P^T DP$ dla pewnej odwracalnej P i diagonalnej D. Macierz D jest dodatnio określona jako macierz Q w pewnej bazie – ma więc dodatnie wyrazy na przekątnej. Zatem $\det D > 0$ i $\det A = \det P^\top DP = \det(P)^2 \det(D) > 0$.

Stosując ten argument do Q ograniczonej do $\mathrm{Lin}(b_1, \ldots, b_k)$ dostajemy dodatniość k-tego minora.

($\Leftarrow$) Definiujemy rekurencyjnie nową bazę B':

$$(GS) \qquad b'_k = b_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{Q(b_k, b'_i)}{Q(b'_i, b'_i)} b'_i$$

Indukcją względem k pokażemy, że
1) $\mathrm{Lin}(b_1, \ldots, b_k) = \mathrm{Lin}(b'_1, \ldots, b'_k)$.
2) $Q(b'_i, b'_j) = 0$ dla $i, j \leq k$, $i \neq j$.

3) $Q(b'_i, b'_i) > 0$ dla $i \leq k$.

D-d 1: $b'_k \in \mathrm{Lin}(b'_1, \ldots, b'_{k-1}, b_k) = \mathrm{Lin}(b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k)$ (GS+ zał. ind.)

$b_k \in \mathrm{Lin}(b'_1, \ldots, b'_{k-1}, b'_k)$ (GS)

D-d 2: Niech $j < k$.

$$\begin{aligned} Q(b'_k, b'_j) &= Q(b_k, b'_j) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{Q(b_k, b'_i)}{Q(b'_i, b'_i)} Q(b'_i, b'_j) \\ &= Q(b_k, b'_j) - \frac{Q(b_k, b'_j)}{Q(b'_j, b'_j)} Q(b'_j, b'_j) = 0 \end{aligned}$$

D-d 3: Niech $B_k = (b_1, \ldots, b_k)$, $B'_k = (b'_1, \ldots, b'_k)$, $V_k = \mathrm{Lin} B_k = \mathrm{Lin} B'_k$.

$m^{B'_k B'_k}(Q|_{V_k}) = P^\top m^{B_k B_k}(Q|_{V_k}) P$

$Q(b'_1) Q(b'_2) \ldots Q(b'_{k-1}) Q(b'_k) = det(P)^2 \cdot$ (k-ty minor główny)

$Q(b'_k)$ jest dodatnie, bo inne czynniki w powyższym wzorze są dodatnie.

Ostatecznie konkludujemy, że $m^{B'_n B'_n}(Q) = \begin{pmatrix} Q(b'_1) & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & Q(b'_n) \end{pmatrix}$ jest dodatnio określona, bo ma na przekątnej dodatnie wyrazy. $\diamond$

Twierdzenie

B, C – bazy V, $Q\colon V \to \mathbf{R}$ – forma kwadratowa.

$$Q(\textstyle\sum_{i=1}^n x^i b_i) = \lambda_1(x^1)^2 + \ldots + \lambda_p(x^p)^2 - \mu_1(x^{p+1})^2 - \ldots - \mu_q(x^{p+q})^2, \quad \lambda_i, \mu_j > 0;$$

$$Q(\textstyle\sum_{i=1}^n y^i c_i) = \eta_1(y^1)^2 + \ldots + \eta_k(y^k)^2 - \xi_1(y^{k+1})^2 - \ldots - \xi_\ell(y^{k+\ell})^2, \quad \eta_i, \xi_j > 0.$$

Wtedy $p = k$, $q = \ell$.

Definicja

Parę (p, q) nazywamy *sygnaturą formy Q.*

Lemat 4

$p = \max\{\dim W \mid W < V, Q|_W \text{jest dodatnio określona}\}$

Dowód:

($\leq$) $Q|_{\mathrm{Lin}(b_1,\ldots,b_p)}$ jest dodatnio określona.

($\geq$) Niech $W < V$, $\dim W > p$. Niech $U = \mathrm{Lin}(b_{p+1}, \ldots, b_n)$. Wtedy
$\dim V \geq \dim(W + U) = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U)$
$\dim(W \cap U) \geq \dim W + \dim U - \dim V = \dim W + (n - p) - n > 0$
Zatem $W \cap U \neq \{0\}$. Weźmy w tym przekroju niezerowy wektor w. Wtedy $w \in W$ i $Q(w) \leq 0$, więc $Q|_W$ nie jest dodatnio określona. $\diamond$

Przykład

Sygnatura $x^2 + 3y^2 - 7xz$ (na $\mathbf{R}^3$):

$Q|_{\mathrm{Lin}(e_1,e_2)}$ dodatnio określona $\Rightarrow p \geq 2$.

$$Q\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} < 0 \Rightarrow q \geq 1.$$

Ale $p + q \leq 3$, więc $(p, q) = (2, 1)$.