Algebra liniowa 1B, Lista 7

1. Przedstaw w postaci $a+bi$: $\frac{(1+i)(2+i)(3+i)}{1-i}$, $\frac{1+i}{1-i}$, $\frac{1+i}{2-i}$, $\frac{1}{i^5}$, $\frac{1}{(-2+i)(1-3i)}$, $\frac{(4-5i)^2}{(2-3i)^2}$.
2. Zapisz w postaci trygonometrycznej: -1, $1+i$, $-1-\sqrt{3}i$, $7-7i$, $-5+5\sqrt{3}i$.
3. Oblicz $\overline{(2+3i)\overline{(7-i)}}$.
4. Rozwiąż układy równań $(a)\begin{cases} z+iw=1 \\ iz+w=1+i \end{cases}$ $(b)\begin{cases} (1+i)z-iw=3+i \\ (2+i)z+(2-i)w=2i \end{cases}$

---

5. Rozwiąż (w $\mathbf{C}$):
   (a) $z^2-z+1=0$, (b) $z^2+3z+3-i=0$, (c) $z^2+(2i-1)z+1+5i=0$, (d) $z^2+iz=2$, (e) $2z+\overline{z}=6-5i$.
6. Udowodnij: (a) $|-z|=|z|$, (b) $|z/w|=|z|/|w|$, (c) $|z/|z||=1$, (d) $\mathrm{Re}(iz)=-\mathrm{Im}(z)$, (e) $\mathrm{Im}(iz)=\mathrm{Re}(z)$, (f) $\overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}$, (g) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$, (h) $|z+w|\leq|z|+|w|$.
7. Średnia arytmetyczna pewnych 150 liczb zespolonych wynosi 1. Udowodnij, że przynajmniej jedna z tych liczb ma moduł nie mniejszy niż 1.
8. Oblicz podane iloczyny posługując się postacią trygonometryczną:
   (a) $(1+i)(\sqrt{3}+i)$, (b) $(4+4i)(-3+3i)$, (c) $(10-10\sqrt{3}i)(2-2i)$, (d) $(\sqrt{3}+i)^{30}$.
9. Oblicz (a) $(1+i)^{1000}$; (b) $(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})^{24}$; (c) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{129}$.
10. Wyraź $\sin(5\phi)$ przez $\sin\phi$ i $\cos\phi$. [Wsk. Użyj wzoru de Moivre'a.]
11. Wyprowadź wzór na postać trygonometryczną ilorazu dwóch liczb zespolonych (o zadanych postaciach trygonometrycznych). Użyj go do obliczenia ilorazów:
    (a) $(2+2i)/(1-i)$, (b) $(1-\sqrt{3}i)/(\sqrt{3}+i)$, (c) $3i/(1+i)$.
12. Narysuj zbiór $\{\frac{1+it}{1-it} : t\in\mathbf{R}\}$.
13. Posługując się postacią trygonometryczną oblicz i narysuj podane pierwiastki:
    (a) 3 stopnia z $8i$; (b) 6 stopnia z 27; (c) 4 stopnia z $-(1/2)-(\sqrt{3}/2)i$; (d) 8 stopnia z 1.
14. Naszkicuj na płaszczyźnie zbiór zadany równaniem / nierównością:
    (a) $\frac{|z+1|}{|z-i|}=1$; (b) $\frac{|z+1|}{|z-i|}=2$; (c) $|\arg z|<\pi/3$; (d) $3<|z-2+i|<5$; (e) $-1<\mathrm{Re}(iz)<0$.
15. Udowodnij, że $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|<1 \iff \mathrm{Im}(z)>0$. Zinterpretuj geometrycznie.

---

16. Liczbę zespoloną nazywamy *pierwiastkiem pierwotnym stopnia n z 1*, jeśli każdy pierwiastek stopnia n z 1 jest jej potęgą. Które spośród pierwiastków z 1 stopnia: (a) 3; (b) 12; (c) 16; są pierwiastkami pierwotnymi tegoż stopnia z 1?
17. Oblicz sumę i iloczyn wszystkich pierwiastków stopnia n z 1.
18. Opisz geometrycznie przekształcenie płaszczyzny $z\mapsto iz$.
19. Wyznacz liczby zespolone odpowiadające parze przeciwległych wierzchołków kwadratu, jeśli pozostałym dwóm wierzchołkom odpowiadają liczby z oraz w.
20. Zinterpretuj geometrycznie wyrażenie $\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right)$. (Zakładamy $z_1\neq z_3\neq z_2$.)

Algebra liniowa 1B, Lista 8

1. Zapisz w postaci wykładniczej: -1, $1+i$, $-1-\sqrt{3}i$, $7-7i$, $-5+5\sqrt{3}i$.
2. Zapisz w postaci wykładniczej wskazane pierwiastki: (a) 3 stopnia z $8i$; (b) 6 stopnia z 27; (c) 4 stopnia z $-(1/2)-(\sqrt{3}/2)i$; (d) 8 stopnia z 1.
3. Rozłóż wielomian $P(z)$ na czynniki liniowe nad $\mathbf{C}$, a także na czynniki liniowe i nierozkładalne kwadratowe nad $\mathbf{R}$. Wykorzystaj fakt, że liczba a jest pierwiastkiem P.
(a) $P(z)=z^3-2z^2-5z+6$, $a=-2$;
(b) $P(z)=z^4+2z^3+7z^2-18z+26$, $a=-2+3i$;
(c) $P(z)=z^4-3z^3+3z^2-3z+2$, $a=i$;
(d) $P(z)=z^5+2z^4+2z^3+10z^2+25z$, $a=1-2i$.
4. Napisz wielomian o współczynnikach rzeczywistych, taki że liczby 1, 3, $2+i$ są jego pierwiastkami.

---

5. Na bokach czworokąta wypukłego zbudowano (na zewnątrz tego czworokąta) kwadraty o środkach A, B, C, D. Udowodnij, że odcinki AC i BD są prostopadłe i mają tę samą długość.
6. Rozłóż wielomian $P(z)$ na czynniki liniowe nad $\mathbf{C}$, a także na czynniki liniowe i nierozkładalne kwadratowe nad $\mathbf{R}$.
(a) $P(z)=z^6+27$;
(b) $P(z)=z^4+4z^3+4z^2-4z-5$;
(c) $P(z)=z^4+4$.
7. Rozwiąż równania: (a) $(z+1)^n-(z-1)^n=0$; (b) $(z+i)^n+(z-i)^n=0$.
8. Uzasadnij wzór $x^{2n+1}-1=(x-1)\Pi_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right)$. Znajdź analogiczny wzór dla $x^{2n}-1$.
9. Oblicz $\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & -7 \\ 1 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}^{1232}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Pomyśl jak zminimalizować ilość potrzebnych rachunków.
10. Uzasadnij (dla $z\neq 1$) wzór $1+z+z^2+\ldots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$. Dla $z=e^{ix}$ część rzeczywista tego wzoru da wzór na sumę $\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$, a część urojona da wzór na $\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$. Napisz te wzory; spróbuj przekształcić je do rzeczywistej postaci (tak, by w ostatecznej odpowiedzi były funkcje trygonometryczne, a nie eksponensy liczb urojonych).
11. Oblicz $(2+i)(5+i)(8+i)$. Wywnioskuj następujący wzór Strassnitzky'ego:
$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}.$$

---

12. Udowodnij, że $\Pi_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{2n+1}=\pm 2^{-n}$; oraz że $\Pi_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$. Znajdź analogiczne wzory dla $\Pi_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n}$ oraz dla $\Pi_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}$.
13. Wyznacz wszystkie takie wielomiany $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest równość $W(x^2)W(x^3)=(W(x))^5$.
14. Przeczytaj prolog książki W.Rudina *Analiza rzeczywista i zespolona.*