Algebra ISIM. Lista1

1. Uzasadnij, że w definicji podprzestrzeni warunek "$0 \in W$" można zastąpić warunkiem "$W \neq \emptyset$".
2. Opisz wszystkie podprzestrzenie $\mathbf{R}^3$.
3. W zbiorze $A = \{(0,0,0,0)^\top, (1,0,1,0)^\top, (1,2,1,3)^\top, (2,2,2,3)^\top, (0,0,0,1)^\top\}$ wskaż podzbiór, który jest bazą $\mathrm{Lin}(A)$ (rzecz dzieje się w $\mathbf{R}^4$).
4. Znajdź bazę podprzestrzeni $\mathbf{R}^5$ zadanej układem równań: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$. (Uzasadnij, że jest to naprawdę baza.)
5. Uzasadnij, że jeśli 3-elementowy zbiór $\{u, v, w\}$ jest bazą V, to również $\{u+v, u+2v+w, w\}$ jest bazą V.
6. Które z następujących zbiorów są podprzestrzeniami:

a) $C(\mathbf{R})$: $\{f \in C(\mathbf{R}) : f(7) = 0\}$, $\{f \in C(\mathbf{R}) : f(12) \geq f(-12)\}$, $\{f \in C(\mathbf{R}) : (\forall x \in \mathbf{R})(f'(x) \geq 0)\}$, $\{f \in C^1(\mathbf{R}) : (\forall x \in \mathbf{R})(3f'(x) + x^2 f(x) = 0)\}$, $\{f \in C(\mathbf{R}) : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$;

b) przestrzeni $c = \{(a_n)_{n=0}^\infty : a_n \in \mathbf{R}\}$ wszystkich ciągów o wyrazach rzeczywistych: $\{(a_n) : (\forall n \geq 0)(a_{n+3} = a_{n+1} - 3a_n)\}$, $\{(a_n) : a_{17} + a_{100}^3 = 0\}$, $\{(a_n) : a_{17} = a_{100}^3 = 0\}$, $\{(a_n) : a_5 + a_7 + a_{15} = 0\}$;

c) $\mathbf{R}^3$ – podzbiory określone przez równania: $z^2 = x^2 + 2y^2$, $x + y + 2z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $2x + 3y + z = 0$;

d) przestrzeni wielomianów $\mathbf{R}[X]$: wielomiany stopnia 7, $\{P \in \mathbf{R}[X] : P'(2) = 0\}$, $\{P \in \mathbf{R}[X] : P''(-1) + P(4) = 0\}$, $\{P \in \mathbf{R}[X] : P''(2) + P(0)^2 = 0\}$,

7. Stosując algorytm Steinitza dokonaj wymiany dla bazy $(1,0,0)^\top, (1,1,0)^\top, (1,1,1)^\top$ i liniowo niezależnego podzbioru $(0,0,1)^\top, (0,1,1)^\top$ przestrzeni $\mathbf{R}^3$.
8. Podaj przykład dwóch baz (a_1, a_2, a_3) i (b_1, b_2, b_3) przestrzeni $\mathbf{R}^3$, takich że (a_1, b_2, b_3) jest bazą $\mathbf{R}^3$, ale (b_1, a_2, a_3) nie jest bazą $\mathbf{R}^3$.
9. Czy prawdą jest, że jeśli $B = (b, b_2, b_3)$ i $C = (c, b_2, b_3)$ są bazami $\mathbf{R}_2[X]$, to dla dowolnego $P \in \mathbf{R}_2[X]$ wektory $[P]_B$ i $[P]_C$ mogą się różnić tylko pierwszą współrzędną?
10. Napisz jawnym wzorem izomorfizm $F : \mathbf{R}^3 \to V$, dla (a) $V = \{(x,y,z,t)^\top \in \mathbf{R}^4 : x + 2y + z + 3t = 0\}$; (b) $V = \{P \in \mathbf{R}_4[X] : P''(0) = P(1) = 0\}$. W przypadku b) oblicz $F^{-1}(X - X^3)$.
11. Załóżmy, że $\dim(V) = n$, $W < V$, $\dim(W) = k$. Uzasadnij, że istnieje izomorfizm $F : V \to K^n$, taki że $F[W] = \{(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)^\top : x_1, \ldots, x_k \in K\}$. Napisz taki izomorfizm wzorem dla $V = \mathbf{R}_3[X]$, $W = \{P \in V : P'(1) + P(0) = 0\}$.

---

12. (W ciele:) Element a' spełniający $a + a' = a' + a = 0$ nazywamy przeciwnym do a i oznaczamy $-a$. Element a' spełniający $aa' = a'a = 1$ nazywamy odwrotnym do a i oznaczamy a^{-1}. Udowodnij, że element przeciwny / odwrotny jest jedyny. Udowodnij, że $(-1) \cdot a = -a$.
13. (W przestrzeni liniowej:) Wektor v' spełniający $v + v' = v' + v = 0$ nazywamy przeciwnym do v i oznaczamy $-v$. Udowodnij, że wektor przeciwny jest jedyny; wykaż, że $-v = (-1) \cdot v$.
14. Udowodnij, że w dowolnej przestrzeni liniowej V zachodzi (a, b to skalary, v, w – wektory): $a(-v) = (-a)v = -av$; $av = 0 \iff (a = 0 \vee v = 0)$; $av + bw = bv + aw \iff (a = b \vee v = w)$.
15. Załóżmy, że $B \subseteq V$, $\mathrm{Lin}(B) = V$, $|B| = \dim V < \infty$. Udowodnij, że B jest bazą V.
16. Uzasadnij, że układ $(v_1, \ldots, v_n)$ jest lnz wtedy i tylko wtedy, gdy $(\forall k \in \{1, \ldots, n\})(v_k \notin \mathrm{Lin}\{v_1, \ldots, v_{k-1}\})$.
17. Uzasadnij, że jeśli $v_1, \ldots, v_n$ są lnz, a v_{n+1} nie jest ich kombinacją liniową, to $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ są lnz. Czy jest też odwrotnie?
18. Udwodnij, że zbiór funkcji potęgowych $\{x^n \mid n = 0, 1, \ldots\}$ jest lnz w $C(\mathbf{R})$.
19. Udowodnij, że podzbiór przestrzeni liniowej jest jej bazą wtedy i tylko wtedy, gdy jest minimalnym (w sensie inkluzji) zbiorem generującym tę przestrzeń.
20. Udowodnij, że dwie bazy tej samej przestrzeni liniowej są równoliczne.
21. Udowodnij, że zbiór $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ z działaniami modulo p jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy p jest liczbą pierwszą.
22. W dowolnym ciele K rozważmy zbiór sum jedynek $F = \{0, 1, 1+1, 1+1+1, \ldots\}$. Udowodnij, że jeśli ten zbiór jest skończony, to jest podciałem K izomorficznym z ciałem reszt modulo pewna liczba pierwsza. Udowodnij też, że jeśli F jest nieskończony, to najmniejsze podciało ciała K jest izomorficzne z $\mathbf{Q}$.

---

23. Uzasadnij, że zbiór $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbf{Q}\}$ ze zwykłymi działaniami jest ciałem.

24. Niech $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Udowodnij, że $((\varphi^n)_n, ((-\varphi)^{-n})_n)$ jest bazą przestrzeni $\mathcal{F} = \{(a_n)_{n=0}^{\infty} \mid (\forall n \geq 0)(a_n \in \mathbf{R}) \wedge (\forall n \geq 2)(a_n = a_{n-1} + a_{n-2})\}$.
25. Wyznacz wymiar $\mathbf{R}$ jako przestrzeni liniowej nad $\mathbf{Q}$.
26. Udowodnij, że zbiór funkcji $\{\cos(nx) \mid n = 0, 1, \ldots\} \cup \{\sin(nx) \mid n = 1, 2, \ldots\}$ jest lnz w $C(\mathbf{R})$.
27. Wskaż możliwie duży liniowo niezależny podzbiór przestrzeni $V = \{P \in \mathbf{R}[X] : P'(-1) = 0\}$.
28. $B = (1, X-2, (X-2)^2, \ldots, (X-2)^n)$ jest bazą $\mathbf{R}_n[X]$; znajdź (w zeszycie z analizy) wzór na $[P]_B$.
29. Uzasadnij, że $\ell^2 = \{(a_n)_{n=0}^{\infty} \mid a_n \in \mathbf{R}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni wszystkich ciągów o wyrazach rzeczywistych.
30. Ile k-wymiarowych podprzestrzeni ma n-wymiarowa przestrzeń liniowa nad ciałem q-elementowym?

Głównym celem wykładu jest przedstawienie podstawowych pojęć i metod algebry liniowej.

1. Przestrzenie liniowe, podprzestrzenie liniowe, liniowa niezależność, baza. Lemat Steinitza o wymianie, wymiar przestrzeni liniowej, izomorficzność przestrzeni tego samego wymiaru.
2. Przekształcenia liniowe, jądro, obraz, tw. o indeksie. Macierz przekształcenia liniowego, składanie i odwracanie przekształceń.
3. Wyznacznik i jego własności, wartości i wektory własne, diagonalizacja.
4. Formy kwadratowe, diagonalizacja metodą Lagrange'a, dodatnia określoność, kryterium Sylvestera, sygnatura.
5. Przestrzeń euklidesowa, baza ortonormalna, proces Grama–Schmidta; przekształcenie sprzężone, operator samosprzężony, twierdzenie spektralne.
6. Układy równań, tw. Kroneckera–Capellego, rząd macierzy, równość rzędu wierszowego i rzędu kolumnowego, Gaussa metoda eliminacji. Minory a rząd macierzy, wzory Cramera.
7. Liczby zespolone.
8. Konstrukcje przestrzeni liniowych: suma prosta, przestrzeń dualna i bidualna, przestrzeń ilorazowa, iloczyn tensorowy.
9. Kompleksyfikacja. Diagonalizacja rzeczywista i zespolona; przestrzenie unitarne, rzuty prostopadłe, przekształcenia ortogonalne i unitarne.
10. Diagonalizacja formy kwadratowej w bazie ortonormalnej, rozkład biegunowy. Postać kanoniczna równania kwadryki.
11. Objętość i macierz Grama.
12. Przekształcenia nilpotentne, przestrzenie pierwiastkowe, tw. Jordana zespolone i rzeczywiste.
13. Algebra tensorowa, symetryczna i zewnętrzna.
14. Iloczyn wektorowy. Geometria prostych i płaszczyzn w $\mathbf{R}^3$. Kwaterniony i izometrie $\mathbf{R}^3$.
15. Macierze o wyrazach dodatnich: tw. Perrona–Frobeniusa, łańcuchy Markowa.

Pomocna literatura:

A.Kostrikin, Wstęp do algebry, tom I: Podstawy algebry, tom II: Algebra liniowa.
A.Kostrykin, Yu.Manin, Algebra liniowa z geometrią.
J.Komorowski, Od liczb zespolonych do tensorów, spinorów, algebr Liego i kwadryk.
T.Banchoff, J.Wermer, Linear Algebra Through Geometry.
skrypt L. Newelskiego, Algebra liniowa II.
Zbiór zadań z algebry, pod red. A. Kostrykina.
A.Mostowski, M.Stark, Algebra liniowa.
A.Mostowski, M.Stark, Elementy algebry wyższej.
A.Białynicki-Birula, Algebra liniowa z geometrią.
A.Białynicki-Birula, Algebra.
B.Gleichgewicht, Algebra.
G.Banaszak, W.Gajda, Elementy algebry liniowej.
G.Birkhoff, S.MacLane, Przegląd algebry współczesnej.
skrypt W. Więsława, Algebra geometryczna.
S.Lang, Algebra.
P.Halmos, Finite dimensional vector spaces.
P.de Souza, J.Silva, Berkeley problems in mathematics.