Algebra ISIM. Lista 10

Przez Sp(1) oznaczamy grupę kwaternionów o długości 1 z mnożeniem kwaternionów jako działaniem.

1. Dokończ zaczęty na wykładzie dowód łączności mnożenia kwaternionów.
2. Kwaternion można zapisać w postaci $z+jw$ dla zespolonych z, w. Opisz mnożenie i sprzężenie kwaternionów używając tej ich reprezentacji.
3. Definiujemy na $\mathbf{H}$ strukturę (prawej) przestrzeni liniowej nad $\mathbf{C}$ określając mnożenie kwaternionu q przez liczbę zespoloną $z = a + bi$ jako kwaternion $q(a + bi)$.

a) Uzasadnij, że odwzorowanie $\mathbf{H} \ni z + jw \mapsto \binom{z}{w} \in \mathbf{C}^2$ jest izomorfizmem zespolonych przestrzeni liniowych. Standardowa baza $\mathbf{C}^2$ odpowiada przy tym izomorfizmie bazie $B = (1, j)$ przestrzeni $\mathbf{H}$.

b) Uzasadnij, że dla dowolnego kwaternionu p odwzorowanie $\ell_p : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ dane wzorem $\ell_p(q) = pq$ jest $\mathbf{C}$-liniowe.

c) Niech $p = z + jw$. Wyznacz macierz ℓ_p w bazie $B = (1, j)$ w terminach liczb z, w.

d) Sprawdź, że jeśli $|p| = 1$, to ℓ_p jest przekształceniem unitarnym o wyznaczniku 1.

e) Niech $SU(2)$ oznacza grupę macierzy unitarnych rozmiaru 2×2 o wyznaczniku 1. Uzasadnij, że odwzorowanie $\mathrm{Sp}(1) \ni p \mapsto m_B(\ell_P) \in SU(2)$ jest izomorfizmem grup.

4. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K wyposażoną w dwuliniowe odwzorowanie (mnożenie) $m: V \times V \to V$. Załóżmy też, że m nie ma dzielników zera, tzn. że dla dowolnych niezerowych $v, w \in V$ iloczyn $m(v, w)$ też jest niezerowy. Celem tego zadania jest pokazanie, że wtedy istnieje na V dwuliniowe mnożenie bez dzielników zera posiadające jedynkę (element neutralny).

a) Uzasadnij, że dla dowolnego niezerowego $v \in V$ odwzorowania $\ell_v: V \ni w \mapsto vw \in V$, $r_v: V \ni w \mapsto wv \in V$, są izomorfizmami.

b) Wybierzmy dowolne niezerowe $u \in V$, i zdefiniujmy nowe mnożenie $m': V \times V \to V$ wzorem $m'(x, y) = m(r_u^{-1}(x), \ell_u^{-1}(y))$. Sprawdź, że m' nie ma dzielników zera. Niech $e = m(u, u)$. Sprawdź, że e jest jedynką mnożenia m', tzn. że $(\forall v \in V)(m'(e, v) = m'(v, e) = v)$.

c) Sprawdź, że V z którymkolwiek z mnożeń m, m' jest algebrą z dzieleniem: dla dowolnego $b \in V$ i dowolnego niezerowego $a \in V$ równanie $m(a, x) = b$ ma jedyne rozwiązanie; podobnie równanie $m(x, a) = b$.
[W praktyce wygodniej oznaczać mnożenia normalnie, np. $m(x, y) = x \cdot y$, $m'(x, y) = x * y$]

Pytanie o istnienie struktury algebry z dzieleniem na $\mathbf{R}^n$ wiąże się z polami wektorowymi na sferze. Jednostkowa sfera w $\mathbf{R}^n$ to $S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| = 1\}$. Pole wektorowe X na S^{n-1} to funkcja przypisująca każdemu $x \in S^{n-1}$ wektor X_x styczny do sfery w punkcie x. Warunek styczności można łatwo zapisać w postaci $X_x \perp x$; zwykle myślimy o X_x jako o wektorze zaczepionym w punkcie x. W problemie algebr z dzieleniem ważne są pola *ciągłe* (X_x ma zależeć od x w ciągły sposób) i *nieznikające* ($X_x \neq 0$ dla wszystkich $x \in S^{n-1}$). Np. na S^1 takim polem jest $X_{(x,y)} = (-y, x)$ – w notacji zespolonej $X_z = iz$.

5. Niech $V = \mathbf{R}^n$ będzie wyposażone w dwuliniowe mnożenie m zadające strukturę algebry z dzieleniem, i niech $S = S^{n-1}$ będzie sferą jednostkową w V. Niech e będzie jedynką mnożenia (z poprzedniego zadania wynika, że można założyć jej istnienie). Uzupełnijmy e do bazy $(e, e_2, \ldots, e_n)$ przestrzeni V, i zadajmy pola wektorowe X^i na S następująco: X^i_x to rzut prostopadły wektora $m(x, e_i)$ na podprzestrzeń $x^\perp$.

a) Uzasadnij, że pola X^i są ciągłe i nieznikające.

b) Uzasadnij, że dla dowolnego $x \in S$ wektory $X^2_x, \ldots, X^n_x$ są lnz.

c) Napisz jawnymi wzorami pola X^2, X^3, X^4 dla kwaternionowego mnożenia na $\mathbf{H} = \mathbf{R}^4$ i bazy $(1, i, j, k)$.

d) "Nie da się zaczesać dwuwymiarowej sfery" - dowiedz się, co to znaczy, i wywnioskuj z tego, że na $\mathbf{R}^3$ nie ma struktury algebry z dzieleniem.

W latach 50-tych ubiegłego wieku Kervaire oraz Bott i Milnor pokazali, że lnz układ $n - 1$ ciągłych nieznikających pól wektorowych na S^{n-1} istnieje jedynie dla $n = 1, 2, 4, 8$.