Algebra ISIM. Lista 11

1. Udowodnij wzory: $\langle A\times B, C\rangle = \langle B\times C, A\rangle$; $A\times(B\times C)+B\times(C\times A)+C\times(A\times B)=0$.
2. Uprość wyrażenia: (a) $\langle A, A\times C\rangle$; (b) $\langle A\times(B+A\times C), A\rangle$; (c) $\langle A+A\times B, A+B\rangle$; (d) $\langle D\times(A+D), (A\times B)\times(C\times A)\rangle$.
3. Niech $P=(1,2,3)^\top$, niech Π będzie płaszczyzną o równaniu $4x+y-z=2$, zaś ℓ niech będzie prostą $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{7}=\frac{z-(-2)}{3}$. Napisz nieparametryczne równanie
   (a) płaszczyzny przechodzącej przez P i równoległej do Π;
   (b) płaszczyzny przechodzącej przez P i zawierającej ℓ;
   (c) prostej przechodzącej przez P i prostopadłej do Π;
   (d) prostej przechodzącej przez P i równoległej do ℓ.
   (e) prostej przechodzącej przez P, równoległej do Π i prostopadłej do ℓ;
   (f) płaszczyzny Π' zawierającej ℓ i takiej, że kąt między Π a Π' jest równy kątowi między Π a ℓ.
4. Znajdź równanie nieparametryczne płaszczyzny zawierającej prostą $\frac{x-1}{3}=\frac{-1-2y}{4}=\frac{3z+9}{-6}$ i prostopadłej do płaszczyzny $-x+4y-2z=100$.
5. Udowodnij, że proste $X=A+tB$, $X=C+tD$ zawierają się w pewnej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy gdy $\langle A, B\times D\rangle=\langle C, B\times D\rangle$. Używając tego warunku stwierdź, czy proste $X=(1,1,2)^\top+t(7,1,0)^\top$, $X=(-6,0,2)^\top+t(1,0,1)^\top$ leżą w jednej płaszczyźnie. Jeśli tak, znajdź równanie tej płaszczyzny.
6. Dla każdej ściany F pewnego wielościanu wypukłego narysowano wektor N_F prostopadły do F, skierowany na zewnątrz wielościanu (jeśli zaczepić go gdzieś w środku ściany F), o długości równej polu ściany F. Pokaż, że suma wszystkich narysowanych wektorów jest równa 0. (Wsk. zrób druciany model wielościanu i zanurz go w strumieniu.)
7. Użyj tożsamości z zadania 1 by pokazać, że wysokości trójkąta sferycznego przecinają się w jednym punkcie.

---

8. Niech $a(t)\in\mathbf{R}[t]$ będzie ustalonym wielomianem. Które z następujących funkcji są funkcjonałami liniowymi na $\mathbf{R}_n[t]$: (a) $f(P)=\int_{-1}^1 a(t)P(t)dt$; (b) $f(P)=\int_0^1 a(t)P(t^2)dt$; (c) $f(P)=\int_0^1 a(t)[P(t)]^2dt$; (d) $f(P)=P'''(-1)$; (e) $f(P)=P(1)P'(-1)$.
9. Niech $\phi^1,\phi^2,\phi^3\in(\mathbf{R}^3)^*$ będą dane wzorami $\phi^1((x,y,z)^\top)=x+2y-z$, $\phi^2((x,y,z)^\top)=y+z$, $\phi^3((x,y,z)^\top)=-x+y+2z$. Uzasadnij, że (ϕ^1,ϕ^2,ϕ^3) jest bazą $(\mathbf{R}^3)^*$; do jakiej bazy $\mathbf{R}^3$ jest on dualna?
10. Niech v_1,v_2,v_3 oraz w_1,w_2,w_3 będą bazami $\mathbf{R}^3$, zaś v^1,v^2,v^3 oraz w^1,w^2,w^3 bazami $(\mathbf{R}^3)^*$ do nich dualnymi. Przypuśćmy, że $v_2=w_2$ oraz $v_3=w_3$. Czy koniecznie musi być tak, że $v^2=w^2$ i $v^3=w^3$?
11. Niech $W<V$, $f\in W^*$. Uzasadnij, że istnieje $F\in V^*$, takie że $F|_W=f$.
12. Uzasadnij, że jeśli $W<V$, $v\in V\backslash W$, to istnieje $f\in V^*$, takie że $f|_W=0$, ale $f(v)\neq 0$.
13. Niech $f,g\in V^*$ spełniają $\ker(f)=\ker(g)$. Udowodnij, że istnieje skalar α, taki że $f=\alpha g$.
14. Udowodnij, że ślad $\mathrm{tr}\colon M_{n\times n}(K)\to K$ jest funkcjonałem na przestrzeni liniowej macierzy $n\times n$. Wykaż, że dla każdego funkcjonału f na tej przestrzeni istnieje jedyna macierz $A\in M_{n\times n}(K)$, taka że $f(X)=\mathrm{tr}(AX)$ dla wszystkich $X\in M_{n\times n}(K)$.
15. Niech $\dim V<\infty$, niech B będzie bazą V, B^* – dualną do niej bazą V^*, B^{**} – dualną do B^* bazą V^{**}. Udowodnij, że $\iota(B)=B^{**}$. ($\iota\colon V\to V^{**}$ to naturalny izomorfizm.)
16. Udowodnij, że
$$(\bigoplus V_\alpha)^*\simeq\prod V_\alpha^*.$$

W trzech kolejnych zadaniach $F\colon V\to W$ jest liniowe, $\dim V, \dim W<\infty$.

17. Sprawdź, że $F^*\colon W^*\ni f\mapsto f\circ F\in V^*$ jest liniowe. Sprawdź, że jeśli utożsamić V z V^{**} a W z W^{**} przez naturalne izomorfizmy ι, to $F^{**}=F$.
18. Zdefiniuj naturalne odwzorowanie $\mathrm{Im}(F^*)\to(V/\ker(F))^*$, i udowodnij, że jest ono monomorfizmem.
19. Z poprzedniego zadania wywnioskuj, że $\dim\mathrm{Im}(F^*)\le\dim\mathrm{Im}(F)$. Następnie z tej nierówności i z przedpoprzedniego zadania wywnioskuj, że $\dim\mathrm{Im}(F^*)=\dim\mathrm{Im}(F)$. Z tego ostatniego stwierdzenia wynika równość rzędu kolumnowego i rzędu wierszowego dowolnej macierzy.
20. Niech $v_1,\dots,v_k\in V$, $\phi^1,\dots,\phi^k\in V^*$. Udowodnij, że jeśli $\det(\phi^i(v_j))\neq 0$, to $v_1,\dots,v_k$ są lnz w V, zaś $\phi^1,\dots,\phi^k$ są lnz w V^*.

21. Udowodnij, że prostokąta o niewspółmiernych bokach nie da się rozciąć na skończenie wiele kwadratów:
a) Niech jeden z boków prostokąta ma długość 1, a drugi ξ. Udowodnij, że istnieje $\phi \in \mathbf{R}^*$ (gdzie $\mathbf{R}$ traktujemy jako przestrzeń liniową nad $\mathbf{Q}$), takie że $\phi(1) = 1$, $\phi(\xi) = -1$.
b) Zdefiniujmy *ϕ-pole* prostokąta o bokach a, b jako iloczyn $\phi(a) \cdot \phi(b)$. Pokaż, że jeśli prostokąt rozciąć na skończenie wiele prostokątów, to suma ϕ-pól kawałków jest równa ϕ-polu wyjściowego prostokąta.
c) Konkluduj (nie wprost, z użyciem ϕ-pola).

---

22. Niech $V = \mathbf{R}[X]$, $W = \{P \in V : P(0) = 0\}$. Uzasadnij, że jeśli Q i S należą do tej samej warstwy W, to $Q(0) = S(0)$. Czy jest też odwrotnie? Uzasadnij, że w każdej warstwie W jest dokładnie jeden wielomian stopnia 0. Wyznacz $\dim(V/W)$.

23. Załóżmy, że $U, W < V$ i $\dim(U) + \dim(W) > \dim(V)$. Udowodnij, że $\dim(U \cap W) > 0$. Czy jest prawdą, że każda warstwa W niepusto przecina się z U?

24. Niech $V = \mathbf{R}^3$, zaś W niech będzie prostą w $\mathbf{R}^3$ zadaną równaniem $x = \frac{y}{3} = -z$.
a) Sprawdź, czy wektory $v_1 + W$, $v_2 + W$ są lnz w V/W, dla (i) $v_1 = (1, 2, 3)^\top$, $v_2 = (4, 5, 6)^\top$; (ii) $v_1 = (2, 6, -2)^\top$, $v_2 = (0, 1, 2)^\top$; (iii) $v_1 = (-1, 0, 2)^\top$, $v_2 = (0, 3, 1)^\top$; (iv) $v_1 = (0, 0, 1)^\top$, $v_2 = (0, 1, 0)^\top$.
b) Wskaż bazę B przestrzeni V/W i oblicz $[v_1]_B$, $[v_2]_B$ dla wszystkich powyższych v_1, v_2.

25. Załóżmy, że $v, w \in \mathbf{R}^3$ są lnz. Jaki warunek musi spełniać jednowymiarowa podprzestrzeń $W < \mathbf{R}^3$, aby $v + W, w + W$ były lz w przestrzeni ilorazowej $\mathbf{R}^3/W$? Rozważ przykład $v = (1, 1, 0)^\top$, $w = (0, 1, 1)^\top$.

26. Niech $V, W < Z$. Pokaż, że $V/(V \cap W) \simeq (V + W)/W$. Wywnioskuj stąd (w przypadku skończenie wymiarowym) wzór $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$.

27. Uzasadnij, że jeśli $W < V$, $(b_1, \ldots, b_k)$ jest bazą W zaś $(b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n)$ bazą V, to $(b_{k+1} + W, \ldots, b_n + W)$ jest bazą V/W.

28. Niech $F\colon V \to V$, $W < V$, $F(W) \subseteq W$. Udowodnij, że istnieje jedyne liniowe $\overline{F}\colon V/W \to V/W$, takie że $p \circ F = \overline{F} \circ p$ (gdzie $p\colon V \to V/W$, $p(v) = v + W$). Jak się mają do siebie macierze F i $\overline{F}$ (w bazach opisanych w poprzednim zadaniu)?

29. Niech $W < V$. Definiujemy *anihilator* W jako następującą podprzestrzeń V^*: $W^0 = \{\phi \in V^* \mid \phi|_W = 0\}$. Skonstruuj nauralne izomorfizmy (a) $W^* \simeq V^*/W^0$; (b) $W^0 \simeq (V/W)^*$.